

Dorota Pekasiewicz

Matematyka

Podręcznik dla studentów
kierunków ekonomicznych



W WYDAWNICTWO
UNIwersYTETU
ŁÓDZKIEGO

METODY ILOŚCIOWE W EKONOMII, FINANSACH I ZARZĄDZANIU

Matematyka

Podręcznik dla studentów
kierunków ekonomicznych



WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

Dorota Pekasiewicz

Matematyka

Podręcznik dla studentów
kierunków ekonomicznych

 WYDAWNICTWO
UNIwersYTETU
ŁÓDZKIEGO
Łódź 2018

METODY ILOŚCIOWE W EKONOMII, FINANSACH I ZARZĄDZANIU

Dorota Pekasiewicz – Uniwersytet Łódzki, Wydział Ekonomiczno-Socjologiczny
Katedra Metod Statystycznych, 90-214 Łódź, ul. Rewolucji 1905 r. nr 41

RECENZENT

Stanisław Wanat

REDAKTOR INICJUJĄCY

Monika Borowczyk

REDAKTOR WYDAWNICTWA UŁ

Katarzyna Gorzkowska

SKŁAD I ŁAMANIE

Munda – Maciej Torz

PROJEKT OKŁADKI

Katarzyna Turkowska

Zdjęcie wykorzystane na okładce: © Depositphotos.com/exopixel

© Copyright by Dorota Pekasiewicz, Łódź 2018

© Copyright for this edition by Uniwersytet Łódzki, Łódź 2018

Wydane przez Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego

Wydanie I. W.08154.17.0.M

Ark. wyd. 10,0; ark. druk. 20,0

ISBN 978-83-8088-993-4

e-ISBN 978-83-8088-994-1

Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego

90-131 Łódź, ul. Lindleya 8

www.wydawnictwo.uni.lodz.pl

e-mail: księgarnia@uni.lodz.pl

tel. (42) 665 58 63

Spis treści

Przedmowa	9
Rozdział 1. Zagadnienia wstępne	11
1.1. Elementy logiki	11
1.2. Elementy teorii mnogości	14
1.3. Relacje	21
1.4. Symbole uogólnione	22
Rozdział 2. Funkcja jednej zmiennej i jej własności	25
2.1. Pojęcie funkcji jednej zmiennej	25
2.2. Ciąg liczbowy i jego własności	26
2.3. Przegląd funkcji elementarnych	37
2.4. Podstawowe własności funkcji jednej zmiennej	44
2.4.1. Monotoniczność i różnowartościowość funkcji	44
2.4.2. Ograniczoność funkcji	46
2.4.3. Okresowość funkcji	47
2.4.4. Parzystość, nieparzystość funkcji	48
2.5. Złożenie funkcji	49
2.6. Funkcja odwrotna	50
2.7. Granica i ciągłość funkcji jednej zmiennej	53
2.7.1. Definicja granicy w punkcie	53
2.7.2. Granice w nieskończoności	57
2.7.3. Własności granic	58
2.8. Ciągłość funkcji	60
2.9. Asymptoty funkcji	63
2.10. Zadania	69
2.11. Pytania testowe	73
2.12. Odpowiedzi do zadań	76
2.13. Odpowiedzi do pytań testowych	79
Rozdział 3. Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej	81
3.1. Pochodna funkcji jednej zmiennej	81
3.1.1. Pochodna funkcji w punkcie	81
3.1.2. Pochodna jako funkcja	84
3.2. Pochodne funkcji wyższych rzędów	89
3.3. Różniczki funkcji	91

3.4. Zastosowanie pochodnych do badania własności funkcji	93
3.4.1. Symbole nieoznaczone i reguła de L'Hospitala	93
3.4.2. Ekstrema lokalne i monotoniczność funkcji	96
3.4.3. Wklęsłość, wypukłość funkcji i punkty przegięcia	103
3.5. Badanie przebiegu zmienności funkcji	107
3.6. Zastosowanie ekonomiczne rachunku różniczkowego funkcji jednej zmiennej	114
3.6.1. Funkcje popytu i podaży. Krzywe Törnquista	114
3.6.2. Funkcje kosztów, przychodu i zysku	117
3.6.3. Elastyczność funkcji	118
3.6.4. Funkcja trendu i stopa wzrostu	119
3.7. Zadania	121
3.8. Pytania testowe	127
3.9. Odpowiedzi do zadań	130
3.10. Odpowiedzi do pytań testowych	144
Rozdział 4. Szeregi liczbowe	145
4.1. Definicja szeregu liczbowego i sumy szeregu	145
4.2. Rodzaje szeregów liczbowych	146
4.3. Wyznaczanie sum wybranych szeregów	147
4.4. Warunek konieczny zbieżności szeregu	151
4.5. Kryteria zbieżności szeregów liczbowych o wyrazach nieujemnych	153
4.6. Badanie zbieżności szeregów naprzemiennych	159
4.7. Zadania	161
4.8. Pytania testowe	164
4.9. Odpowiedzi do zadań	167
4.10. Odpowiedzi do pytań testowych	169
Rozdział 5. Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej	171
5.1. Pojęcie całki nieoznaczonej i jej własności	171
5.2. Podstawowe metody całkowania	174
5.3. Całka oznaczona Riemanna i jej własności	178
5.4. Całki niewłaściwe I i II rodzaju	186
5.5. Całka jako funkcja górnej granicy całkowania	191
5.6. Funkcja beta i gamma	193
5.7. Przykłady zastosowania rachunku całkowego w ekonomii	196
5.8. Zadania	198
5.9. Pytania testowe	202
5.10. Odpowiedzi do zadań	205
5.11. Odpowiedzi do pytań testowych	207

Rozdział 6. Macierze	209
6.1. Pojęcie macierzy i rodzaje macierzy	209
6.2. Działania na macierzach	213
6.3. Charakterystyki liczbowe macierzy	217
6.4. Macierz transponowana i odwrotna. Metody wyznaczania	225
6.5. Pierwiastki charakterystyczne. Określoność macierzy	231
6.6. Zadania	233
6.7. Pytania testowe	237
6.8. Odpowiedzi do zadań	240
6.9. Odpowiedzi do pytań testowych	243
Rozdział 7. Układy równań liniowych	245
7.1. Definicja układu równań liniowych i jego postaci	245
7.2. Klasyfikacja układów równań	246
7.3. Twierdzenie Kroneckera-Cappellego i jego zastosowanie	249
7.4. Układy równań Cramera	251
7.5. Nieoznaczone układy równań	254
7.6. Zadania	258
7.7. Pytania testowe	260
7.8. Odpowiedzi do zadań	263
7.9. Odpowiedzi do pytań testowych	265
Rozdział 8. Funkcje wielu zmiennych	267
8.1. Pojęcie funkcji wielu zmiennych	267
8.2. Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych	270
8.3. Pochodne cząstkowe funkcji wielu zmiennych	274
8.4. Pochodna kierunkowa funkcji wielu zmiennych	280
8.5. Różniczki zupełne funkcji wielu zmiennych	282
8.6. Zastosowanie pochodnych cząstkowych do badania funkcji wielu zmiennych	285
8.6.1. Ekstrema lokalne funkcji wielu zmiennych	285
8.6.2. Wklęsłość i wypukłość funkcji wielu zmiennych	288
8.6.3. Ekstrema warunkowe funkcji wielu zmiennych	290
8.6.4. Najmniejsza i największa wartość funkcji	293
8.7. Zastosowanie ekonomiczne funkcji wielu zmiennych	297
8.8. Zadania	302
8.9. Pytania testowe	307
8.10. Odpowiedzi do zadań	310
8.11. Odpowiedzi do pytań testowych	317
Literatura	319

Przedmowa

Metody ilościowe odgrywają istotną rolę w różnego rodzaju badaniach ekonomicznych, społecznych, przyrodniczych czy medycznych. Pozwalają skutecznie rozwiązać wiele problemów i podejmować najbardziej optymalne decyzje, a także wpływają na rozwój różnych dziedzin nauki.

Metody Ilościowe w Ekonomii, Finansach i Zarządzaniu to cykl publikacji zawierający treści programowe z matematyki oraz statystyki obowiązujące studentów kierunków ekonomicznych, jak również przydatne osobom prowadzącym prace naukowe i badawcze.

Cykl ten rozpoczyna *Matematyka*, w której przedstawione są najważniejsze pojęcia z zakresu analizy matematycznej i algebry, które mogą być wykorzystywane w badaniach ekonomicznych.

Książka składa się z ośmiu rozdziałów. W rozdziale pierwszym przedstawione są zagadnienia wstępne – elementy logiki i teorii mnogości. Kolejne rozdziały poświęcone są funkcjom jednej zmiennej, w szczególności ciągom liczbowym, rachunkowi różniczkowemu i całkowemu funkcji jednej zmiennej oraz szeregom liczbowym. W rozdziale szóstym i siódmym ujęto najważniejsze zagadnienia dotyczące rachunku macierzowego i metod rozwiązywania układów równań liniowych. Ostatni rozdział zawiera wiadomości związane z funkcjami wielu zmiennych, ze szczególnym uwzględnieniem funkcji dwóch zmiennych.

Oprócz rozważań teoretycznych książka zawiera przykłady o charakterze matematycznym, mające na celu przybliżenie opisywanych problemów i wskazanie metod ich rozwiązania, a także przykłady prezentujące zastosowanie ekonomiczne rozważanych pojęć. W każdym rozdziale, oprócz pierwszego, znajdują się zadania do samodzielnego rozwiązania i pytania testowe, do których podane są odpowiedzi. Wydaje się, że taki układ publikacji będzie pomocny studentom w uczeniu się matematyki na różnych kierunkach studiów, o zróżnicowanym stopniu zaawansowania wymagań matematycznych.

Autorka

ROZDZIAŁ 1

Zagadnienia wstępne

1.1. Elementy logiki

Podstawowymi pojęciami logiki są: zdanie, forma zdaniowa, funkcja zdaniowa i kwantyfikatory.

Zdaniem nazywamy każde wyrażenie, któremu można przypisać jedną z ocen: prawdę lub fałsz. Prawda i fałsz to **wartości logiczne zdania**.

Zdania oznaczamy zwykle małymi literami, np. p , q , zaś wartość logiczną zdania – symbolem „1”, gdy jest ono prawdziwe oraz symbolem „0”, gdy jest fałszywe.

Wśród zdań wyróżniamy **zdania proste** i **złożone**. Zdania złożone składają się ze zdań prostych połączonych **funktorami zdaniotwórczymi (spójnikami zdaniowymi)**.

Do najczęściej stosowanych funktorów zdaniotwórczych należą:

- negacja (\sim),
- alternatywa (\vee),
- koniunkcja (\wedge),
- implikacja (\Rightarrow),
- równoważność (\Leftrightarrow).

Negacją zdania p nazywamy zdanie „nieprawda, że p ” i oznaczamy $\sim p$. **Alternatywą** nazywamy zdanie „ p lub q ” i oznaczamy $p \vee q$, zaś **koniunkcją** – zdanie „ p i q ”, które oznaczamy $p \wedge q$. **Implikacją** nazywamy zdanie „jeżeli p , to q ” i zapisujemy $p \Rightarrow q$, natomiast **równoważnością** – zdanie „ p wtedy i tylko wtedy, gdy q ” i zapisujemy $p \Leftrightarrow q$.

Przykładem zdania prostego fałszywego (o wartości logicznej 0) jest „liczba $\sqrt[3]{8}$ jest niewymierna”, natomiast zdanie proste prawdziwe (o wartości logicznej 1) to „romb jest trapezem”.

Wartości logiczne zdań złożonych, w zależności od wartości logicznych zdań prostych wchodzących w skład rozpatrywanego zdania przedstawione są w tab. 1.

Tablica 1. Wartości logiczne negacji, alternatywy, koniunkcji, implikacji i równoważności

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Zdanie typu „liczba pierwsza jest podzielna przez 1 i przez samą siebie” jest koniunkcją i jest zdaniem złożonym prawdziwym.

Zdanie prawdziwe nazywamy **tautologią**. Do ważniejszych tautologii należą zdania:

- 1) $p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$ (prawo podwójnego przeczenia),
- 2) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$ (prawo de Morgana),
- 3) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ (prawo de Morgana),
- 4) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ (prawo transpozycji),
- 5) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ (prawo implikacji),
- 6) $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ (reguła odrywania),
- 7) $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [p \wedge (\sim q)]$, (zaprzeczenie implikacji),
- 8) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$.

Przykłady innych tautologii można znaleźć m.in. w podręczniku: Abtowa, Piasecki, Różański, Świtalski (2000).

Sprawdzenie prawdziwości zdań związane jest z rozważeniem wszystkich możliwych wariantów wartości logicznych zdań p i q .

Przykład 1.1.

Prawdziwość praw de Morgana jest uzasadniona następująco:

$$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

$$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$$

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Ostatnie kolumny w tablicach świadczą o prawdziwości rozważanych zdań bez względu na wartości logiczne zdań p i q , zatem są tautologiami.

Wyrażenie, któremu nie można przypisać wartości logicznej nazywamy **formą zdaniową**.

Formą zdaniową jest **funkcja zdaniowa**, czyli wyrażenie zawierające zmienne. Funkcja zdaniowa staje się zdaniem, jeśli za zmienne podstawimy konkretne wielkości z jej zakresu zmienności (dziedziny).

Przykład 1.2.

Wyrażenie $x^2 - 1 = 3$, gdzie $x \in R$, jest funkcją zdaniową, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych R . Dla $x \in \{-2, 2\}$ ma ono wartość logiczną 1, a dla $x \notin \{-2, 2\}$ – wartość logiczną 0.

Przykład 1.3.

Wyrażenie $x^2 - 1 = 3$, gdzie $x \in N$, jest funkcją zdaniową, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych N . Dla $x = 2$ ma ono wartość logiczną 1, a dla $x \in N \setminus \{2\}$ – wartość logiczną 0.

W zapisie funkcji zdaniowych wykorzystuje się symbole zwane **kwantyfikatorami**. Wyróżniamy:

- **kwantyfikator ogólny** (duży): \forall – „dla każdego...”,
- **kwantyfikator szczegółowy** (mały): \exists – „istnieje...”.

Kwantyfikatory umożliwiają skrócenie zapisu funkcji zdaniowych. Na przykład funkcję zdaniową „liczba naturalna n jest liczbą parzystą” można zapisać za pomocą kwantyfikatorów w postaci: $\exists_{k \in \mathbb{N}} n = 2k$.

Kwantyfikatory znajdują zastosowanie w zapisach definicji i twierdzeń matematycznych.

Rachunek kwantyfikatorów charakteryzuje się następującymi własnościami:

- 1) $\sim \left(\exists_{x \in X} p(x) \right) \Leftrightarrow \forall_{x \in X} (\sim p(x))$ (prawo de Morgana),
- 2) $\sim \left(\forall_{x \in X} p(x) \right) \Leftrightarrow \exists_{x \in X} (\sim p(x))$ (prawo de Morgana),
- 3) $\exists_{x \in X} (p(x) \vee q(x)) \Leftrightarrow \exists_{x \in X} p(x) \vee \exists_{x \in X} q(x)$,
- 4) $\exists_{x \in X} (p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow \exists_{x \in X} p(x) \wedge \exists_{x \in X} q(x)$,
- 5) $\forall_{x \in X} (p(x) \wedge q(x)) \Leftrightarrow \forall_{x \in X} p(x) \wedge \forall_{x \in X} q(x)$,
- 6) $\left(\forall_{x \in X} p(x) \right) \vee \left(\forall_{x \in X} q(x) \right) \Rightarrow \forall_{x \in X} (p(x) \vee q(x))$,
- 7) $\forall_{x \in X} (p(x) \Rightarrow q(x)) \Rightarrow \left(\forall_{x \in X} p(x) \Rightarrow \forall_{x \in X} q(x) \right)$,

gdzie p i q są funkcjami zdaniowymi zmiennej x o zakresie zmienności $X \neq \emptyset$.

1.2. Elementy teorii mnogości

Teoria mnogości jest działem matematyki zajmującym się badaniem własności zbiorów.

Zbiór jest pojęciem pierwotnym, niedefiniowanym. Zbiory oznaczamy dużymi literami (np. A, B, C, \dots), zaś elementy należące do zbiorów – małymi literami: a, b, \dots

Zbiory przedstawiamy, wypisując ich elementy, np. $\{2, 4, 6, 8\}$ albo podając funkcję zdaniową, którą muszą spełniać ich elementy, np. $\{x \in R: x^2 - 1 < 0\}$.

Pewnym zbiorom przypisane są standardowe oznaczenia:

N – zbiór liczb naturalnych, czyli zbiór $\{0, 1, 2, \dots\}$,

N^+ – zbiór liczb naturalnych dodatnich, czyli zbiór $\{1, 2, \dots\}$,

C – zbiór liczb całkowitych,

W – zbiór liczb wymiernych,

NW – zbiór liczb niewymiernych,

R – zbiór liczb rzeczywistych,

R^+ – zbiór liczb rzeczywistych dodatnich,

R^- – zbiór liczb rzeczywistych ujemnych.

Określenie zbiór liczb naturalnych dotyczyć może zbioru $\{1, 2, \dots\}$ (por. Piszczała, 2000).

Liczbę elementów zbioru A nazywamy **liczebnością** lub **licznością** zbioru i oznaczamy $n(A)$.

Zbiory o tej samej liczebności nazywamy **równolicznymi** lub zbiorami o tej samej **mocy**.

Zbiory skończone (o skończonej liczbie elementów) lub równoliczne ze zbiorem liczb naturalnych (nieskończone, których elementy da się uporządkować) nazywamy **przelicznymi**. Zbiory niebędące przelicznymi nazywane są **nieprzelicznymi**. Zbiorami nieprzelicznymi są m.in. zbiór liczb rzeczywistych, zbiór liczb niewymiernych.

Zbiór liczbowy może być **ograniczony** lub **nieograniczony**.

Zbiorami ograniczonymi są przedziały liczbowe postaci:

$(a, b) = \{x \in R: a < x < b\}$, $\langle a, b \rangle = \{x \in R: a \leq x \leq b\}$, $(a, b] = \{x \in R: a < x \leq b\}$,
 $\langle a, b \rangle = \{x \in R: a \leq x < b\}$, zaś przedziały $(a, \infty) = \{x \in R: x > a\}$,
 $\langle a, \infty \rangle = \{x \in R: x \geq a\}$, $(-\infty, b) = \{x \in R: x < b\}$, $(-\infty, b] = \{x \in R: x \leq b\}$ są zbiorami nieograniczonymi (a, b to ustalone liczby rzeczywiste).

Dla ograniczonego zbioru liczbowego A określamy kres dolny i kres górny zbioru.

Kresem dolnym (infimum) ograniczonego zbioru A nazywamy największą liczbę ograniczającą ten zbiór z dołu i oznaczamy $\inf A$.