Rozdział 2

Zbiory wypukłe i stożki

2.1. Podzbiory liniowe przestrzeni $\mathbb{R}^n$

2.1. Sprawdzić, czy punkty $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ leżą na jednej prostej.

2.2. Wyznaczyć równanie parametryczne prostej w $\mathbb{R}^3$ leżącej na płaszczyznach o równaniach $2x_1 + x_2 - x_3 = 2$, $x_1 + 3x_2 + x_3 = 1$.

2.3. Zbadać wzajemne położenie prostej przechodzącej przez punkty $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ i płaszczyzny $3x_1 + x_2 - x_3 = 3$, jeśli:

a) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$; c) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$;

b) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

2.4. Punkt $\mathbf{c}$ należy do odcinka $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ o długości 15. Wyznaczyć współrzędne punktu $\mathbf{b}$, jeśli $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

2.5. Wykazać, że punkt $\mathbf{c}$ należy do odcinka $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek $\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| = \|\mathbf{b} - \mathbf{c}\| + \|\mathbf{c} - \mathbf{a}\|$.

2.6. Wykazać, że jeśli $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H(\mathbf{a}, b)$, to prosta przechodząca przez punkty $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ jest zawarta w $H(\mathbf{a}, b)$.

2.7. Wykazać, że zbiór $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^n$ jest rozmaitością liniową wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in X$ dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takich, że $\alpha + \beta = 1$.

2.8. Wykazać, że jeśli $X \subset \mathbb{R}^n$ jest rozmaitością liniową, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest przekształceniem liniowym, to $f(X)$ jest rozmaitością liniową.

2.9. Wektor $\mathbf{x}$ nazywamy *ortogonalnym do rozmaitości liniowej*

$$X = \mathbf{x}_0 + V$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{x}$ jest ortogonalny do podprzestrzeni liniowej V. Sprawdzić, czy wektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$ jest ortogonalny do rozmaitości liniowej $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - x_2 + x_3 = 7\}$.

2.2. Zbiory wypukłe

2.10. Udowodnić, że suma wektorowa $M_1 + M_2 + ... + M_k$ zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym.

2.11. Wykazać, że jeśli zbiór $M \subset \mathbb{R}^n$ jest wypukły, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest przekształceniem liniowym, to zbiór $f(M)$ jest wypukły.

2.12. Czy, jeśli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, gdzie $n \neq m$, jest przekształceniem liniowym, a $M \subset \mathbb{R}^m$ jest zbiorem wypukłym, to $f^{-1}(M) \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem wypukłym? Odpowiedź uzasadnić.

2.13. Wykazać, że zbiór $A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| \leqslant 1\}$ jest wypukły. Podać jego ilustrację graficzną.

2.14. Podać ilustrację graficzną zbioru $A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leqslant 2x_1 \leqslant 2\}$. Czy jest to zbiór wypukły? Odpowiedź uzasadnić.

2.15. Dane są punkty $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$. Podać ilustrację graficzną zbioru $\operatorname{conv}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$. Sprawdzić, czy $\mathbf{x} \in \operatorname{conv}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, jeśli:

a) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$, b) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, c) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

2.2.1. Twierdzenia o rozdzielaniu, punkty ekstremalne

2.16. Niech $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{bd} M$, gdzie $M \subset \mathbb{R}^n$ jest domkniętym zbiorem wypukłym; $H(\mathbf{a}, b)$ jest hiperpłaszczyzną taką, że $(\mathbf{a}|\mathbf{x}) \leqslant (\mathbf{a}|\mathbf{x}_0) = b$ dla każdego $\mathbf{x} \in M$. Wykazać, że:

a) $M \cap H(\mathbf{a}, b)$ jest niepustym zbiorem wypukłym;
b) jeśli $\overline{\mathbf{x}}$ jest punktem ekstremalnym zbioru $M \cap H(\mathbf{a}, b)$, to $\overline{\mathbf{x}}$ jest punktem ekstremalnym zbioru M.

2.17. Wyznaczyć hiperpłaszczyznę podpierającą zbiór

$$M = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geqslant x_1^2 \right\}$$

w punkcie $\mathbf{x}_0 = [\,-1 \;\, 1\,]^T$.

2.18. Wyznaczyć hiperpłaszczyznę podpierającą zbiór

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 4 \right\}$$

w punkcie $\mathbf{x}_0 = \left[1 \;\, -1 \;\, \sqrt{2} \right]^T$.

2.19. Wyznaczyć hiperpłaszczyznę rozdzielającą zbiory

$$K(\mathbf{0}, 1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| < 1\}$$

oraz

$$A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{e}_1 | \mathbf{x}) \geqslant 1\} .$$

2.20. Sprawdzić, czy hiperpłaszczyzna $H(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, 1)$ rozdziela zbiory A i B, jeśli

$$A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{e}_1 | \mathbf{x}) \geqslant 1\} , \; B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 | \mathbf{x}) \leqslant 1\} .$$

2.21. Wyznaczyć zbiór conv$A$ i jego punkty ekstremalne, jeśli

$$A = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 (x_1 - 1) = 0 \wedge x_2 (x_2 - 1) = 0 \right\} .$$

2.3. Funkcje wypukłe

2.22. Udowodnić, że jeśli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest przekształceniem liniowym, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ jest funkcją wypukłą, to $g \circ f$ jest funkcją wypukłą.

2.23. Niech $f_1, f_2, ..., f_k : M \to \mathbb{R}$ będą funkcjami wypukłymi. Wykazać, że wypukłe są funkcje:

a) $f(\mathbf{x}) = \max \{f_1 (\mathbf{x}) , f_2 (\mathbf{x}) , ..., f_k (\mathbf{x})\}$;

b) $g(\mathbf{x}) = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(\mathbf{x})$, gdzie $\alpha_i \geqslant 0$ dla $i = 1, 2, ..., k$.

2.24. Udowodnić, że jeśli funkcja $f : M \to \mathbb{R}$ jest wypukła, to dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zbiór $M_a = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \leqslant a\}$ jest wypukły. Czy prawdziwe jest twierdzenie odwrotne?

2.25. Wykazać, że funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} | \mathbf{x})$ jest wypukła.

2.26. Udowodnić, że różniczkowalna funkcja $f : M \to R$ jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \geqslant f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

dla dowolnych $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_0 \in M$.

2.27. Udowodnić, że jeśli różniczkowalna funkcja $f : M \to \mathbb{R}$ jest wypukła, to dla każdego $\mathbf{x}_0 \in M$ hiperpłaszczyzna styczna do wykresu funkcji w punkcie $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ f(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$ jest hiperpłaszczyzną podpierającą zbiór Epi$f$ w punkcie $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ f(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$.

2.28. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}|\mathbf{x})$, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + ... + \mathbf{e}_n$. Wyznaczyć równanie hiperpłaszczyzny podpierającej zbiór Epi$f$ w punkcie $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ f(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$.

2.29. Udowodnić, że dla dowolnych liczb $x_1, x_2, ..., x_k \in \mathbb{R}$ spełniona jest nierówność

$$\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j\right)^2 \leqslant \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j^2,$$

gdzie $\alpha_j \geqslant 0$ dla $j = 1, 2, ..., k$, $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1$.

2.30. Udowodnić, że dla dowolnych liczb $x_1, x_2, ..., x_k \in (0, +\infty)$ spełniona jest nierówność

a) $\dfrac{1}{\sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j x_j} \leqslant \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j \dfrac{1}{x_j}$,

b) $\log_2 \left(\sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j x_j\right) \geqslant \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j \log_2(x_j)$,

gdzie $\alpha_j \geqslant 0$ dla $j = 1, 2, ..., k$, $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1$.

2.31. Sprawdzić, czy podane zbiory są wypukłe:

a) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geqslant e^{x_1}\}$,
b) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_3 \geqslant x_1^2 + x_2^2\}$,
c) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_3^2 \geqslant x_1^2 + x_2^2\}$,
d) $\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_3 \geqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right\}$,
e) $\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} \geqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}\right\}$.