

# Spis treści

Przedmowa do drugiego wydania . . . . .	9
Przedmowa do pierwszego wydania . . . . .	10
<b>1. Preliminaria . . . . .</b>	<b>13</b>
1.1. Przestrzeń i czasoprzestrzeń w matematyce . . . . .	13
1.2. Wektory na rozmaitości . . . . .	15
1.3. Tensory . . . . .	16
1.4. Przestrzenie $\mathbf{R}^n$ i $\mathbf{E}^n$ . . . . .	17
1.4.1. Afiniczna przestrzeń euklidesowa $\mathbf{E}^n$ . . . . .	21
1.5. Odwzorowania przestrzeni $\mathbf{R}^n$ . . . . .	24
1.6. Transformacje współrzędnych . . . . .	29
1.6.1. Współrzędne biegunowe na płaszczyźnie . . . . .	33
1.7. Wymiar przestrzeni . . . . .	36
1.8. Notacja . . . . .	37
<b>2. Rozmaitości różniczkowe . . . . .</b>	<b>40</b>
2.1. Wprowadzenie . . . . .	40
2.2. Definicja rozmaitości różniczkowej . . . . .	42
2.2.1. Rozmaitość . . . . .	50
2.3. Przykłady rozmaitości gładkich . . . . .	53
2.4. Rozmaitości gładkie w $\mathbf{R}^n$ . . . . .	61
2.5. Rozmaitości indukowane i iloczynowe . . . . .	67
2.6. Powierzchnie jednostronne. Wstęga Möbiusa i butelka Kleina . . . . .	69
2.7. Odwzorowania rozmaitości . . . . .	74
2.8. Krzywe gładkie . . . . .	81
2.9. Klasyfikacja rozmaitości . . . . .	85
<b>3. Wektory i tensory . . . . .</b>	<b>88</b>
3.1. Geometryczny opis wektora . . . . .	88
3.2. Przestrzeń styczna do $\mathbf{E}^n$ . . . . .	91
3.3. Liniowa transformacja współrzędnych w $\mathbf{E}^n$ i zmiana bazy w $T_p\mathbf{E}^n$ . . . . .	93
3.4. Wektor jako operator różniczkowy . . . . .	95

3.5. Przestrzeń styczna do rozmaitości . . . . .	98
3.6. Gładkie pola wektorowe . . . . .	102
3.7. Wektory kowariantne . . . . .	105
3.8. Pola kowektorów i gradient funkcji . . . . .	108
3.8.1. Graficzne przedstawienie kowektora . . . . .	112
3.9. Tensory . . . . .	115
3.10. Składowe i bazy tensorów . . . . .	117
3.11. Pola tensorowe . . . . .	119
3.12. Działania na tensorach . . . . .	124
3.13. Komutator pól wektorowych . . . . .	126
3.14. Tensor metryczny . . . . .	130
3.15. Operacje na tensorach za pomocą metryki . . . . .	140
3.16. Wyznaczniki i symbol Leviego–Civity . . . . .	143
3.17. Uogólniony symbol Kroneckera . . . . .	149
3.18. Tensory względne . . . . .	152
3.19. Rozmaitości dwuwymiarowe . . . . .	153
3.20. Metryka hiperpowierzchni . . . . .	154
3.20.1. Sfera $S^n$ . . . . .	160
3.21. Przestrzenie hiperboliczne . . . . .	161
3.21.1. Wstęp historyczny . . . . .	161
3.21.2. Płaszczyzna hiperboliczna jako sfera w przestrzeni Minkowskiego . . . . .	163
3.21.3. Model Kleina płaszczyzny Łobaczewskiego . . . . .	164
3.21.4. Model Poincarégo płaszczyzny hiperbolicznej . . . . .	166
3.21.5. Pseudosfera Beltramiego . . . . .	167
3.21.6. Przekształcenia modeli . . . . .	170
3.22. Orientowalność rozmaitości . . . . .	171
<b>4. Odwzorowania tensorów i pochodna Liego . . . . .</b>	<b>175</b>
4.1. Odwzorowania styczne funkcji i wektorów . . . . .	175
4.2. Odwzorowania styczne dla kowektorów . . . . .	179
4.3. Odwzorowania styczne dla dowolnych tensorów . . . . .	180
4.4. Transformacje czynne i bierne . . . . .	182
4.5. Symetrie i przeniesienie według Liego . . . . .	184
4.6. Pochodna Liego . . . . .	187
4.7. Ogólne własności pochodnej Liego . . . . .	190
4.8. Pochodna Liego tensorów względnych . . . . .	195
4.9. Symetrie . . . . .	198
<b>5. Pochodna absolutna i kowariantna . . . . .</b>	<b>201</b>
5.1. Pochodna absolutna wektora . . . . .	202
5.2. Pochodna kowariantna wektora . . . . .	204
5.3. Transformacje koneksji afinicznej . . . . .	207
5.4. Pochodna kowariantna i absolutna tensora . . . . .	209
5.5. Pochodne wyższych rzędów . . . . .	214
5.6. Pochodne kowariantne tensorów względnych . . . . .	215
5.7. Przestrzeń z koneksją afiniczną . . . . .	217
5.7.1. Koneksja symetryczna i pochodna Liego . . . . .	218
5.8. Przeniesienie równoległe . . . . .	220

5.9. Linie geodezyjne . . . . .	223
5.9.1. Przekształcenia geodezyjne koneksji afinicznej . . . . .	228
5.9.2. Interpretacja geometryczna skręcenia koneksji . . . . .	230
5.10. Odwzorowanie eksponencjalne i współrzędne riemannowskie . . . . .	233
5.11. Krzywizna przestrzeni . . . . .	236
5.12. Tensor krzywizny . . . . .	238
5.13. Interpretacja geometryczna tensora krzywizny . . . . .	245
5.14. Przestrzenie afinicznie płaskie . . . . .	247
5.15. Pochodna Liego koneksji i krzywizny . . . . .	253
<b>6. Różniczkowanie w przestrzeni Riemanna . . . . .</b>	<b>257</b>
6.1. Koneksja metryczna i symetryczna . . . . .	257
6.2. Kowariantne operatory różniczkowe . . . . .	263
6.3. Tożsamości różniczkowe pierwszego rzędu dla metryki . . . . .	267
6.4. Różniczkowanie tensorów względnych i pochodna Liego . . . . .	270
6.5. Geodetyki jako linie najkrótsze . . . . .	272
6.5.1. Form-inwariantność funkcjonału długości . . . . .	278
6.5.2. Ekstremum warunkowe . . . . .	281
6.6. Własności metryczne geodetyk . . . . .	285
6.7. Przykłady linii geodezyjnych . . . . .	290
6.8. Współrzędne normalne riemannowskie . . . . .	300
6.9. Współrzędne normalne geodezyjne Gaussa . . . . .	309
<b>7. Krzywizna i izometrie przestrzeni Riemanna . . . . .</b>	<b>314</b>
7.1. Tensory Riemanna i Ricciego oraz skalar krzywizny . . . . .	314
7.2. Przestrzenie metrycznie płaskie . . . . .	317
7.3. Pola wektorowe kowariantnie stałe . . . . .	319
7.4. Krzywizna przestrzeni w wymiarach 1, 2 i 3 . . . . .	321
7.5. Krzywizna przestrzeni $S^2$ , $H^2$ , $T^2$ , $S^3$ i $H^3$ . . . . .	324
7.6. Krzywizna przestrzeni wielowymiarowych. Tensor Weyla . . . . .	326
7.7. Czasoprzestrzenie czterowymiarowe . . . . .	330
7.7.1. Przestrzeń de Sittera . . . . .	330
7.7.2. Przestrzeń anty-de Sittera . . . . .	335
7.7.3. Czasoprzestrzenie Robertsona-Walkera . . . . .	337
7.7.4. Płaska fala grawitacyjna . . . . .	340
7.8. Tensory krzywizny i tensory Weyla dla różnych metryk . . . . .	343
7.9. Niezmienniki tensora krzywizny . . . . .	345
7.10. Tożsamości Bianchiego . . . . .	348
7.10.1. Całkowe tożsamości Bianchiego . . . . .	350
7.11. Dewiacja geodezyjna . . . . .	354
7.11.1. Skalarne równania dewiacji geodezyjnej . . . . .	361
7.12. Krzywizna sekcyjna . . . . .	363
7.13. Krzywizna a metryka . . . . .	367
7.14. Izometrie i przestrzenie z symetriami . . . . .	367
7.14.1. Przestrzenie o stałej krzywiznie . . . . .	369
7.14.2. Jednorodność i izotropowość . . . . .	372
7.14.3. Przestrzenie o stałej krzywiznie i symetryczne . . . . .	375
7.15. Wektory Killinga . . . . .	376

7.15.1. Klasyczna konstrukcja wektora Killinga . . . . .	378
7.16. Wyznaczenie izometrii z wektorów Killinga . . . . .	380
7.17. Własności wektorów Killinga . . . . .	383
7.17.1. Pola Killinga i Jacobiego . . . . .	390
7.18. Warunki całkowalności równań Killinga . . . . .	392
7.19. Wektory Killinga a jednorodność i izotropowość . . . . .	395
7.20. Przykłady wektorów Killinga . . . . .	398
7.21. Wektory ortogonalne do hiperpowierzchni . . . . .	406
7.22. Izometrie przestrzeni zamkniętych . . . . .	409
<b>Skorowidz</b> . . . . .	<b>413</b>
<b>Skorowidz nazwisk</b> . . . . .	<b>421</b>