

OD AUTORA

Książka, którą trzymasz w ręku, zawiera treści należące do programu przedmiotu badania operacyjne, zgodnie ze standardami nauczania obowiązującymi na kierunku Informatyka i Ekonometria.

Materiał został podzielony na siedem części składających się z dwóch lub więcej rozdziałów i obejmujących wybrane zagadnienie z zakresu badań operacyjnych. Każdy rozdział rozpoczyna się częścią teoretyczną, wzbogaconą o przykłady. Przykłady (jak również przypisy) są integralną częścią książki i muszą być czytane w kolejności podanej w tekście. Rozdział zamykają zagadnienia do powtórzenia, umożliwiające usystematyzowanie wiedzy nabytej podczas lektury, oraz zadania z odpowiedziami.

Poza przedstawieniem metod rozwiązywania różnego typu zadań z zakresu badań operacyjnych, w książce opisałem również sposób rozwiązywania zadań za pomocą dodatku *Solver* do aplikacji MS Excel. Nie jest to zapewne najlepsze narzędzie optymalizacyjne, jest jednak powszechne, a przede wszystkim współpracuje z jedną z podstawowych aplikacji biznesowych, dzięki czemu umiejętność jego właściwego wykorzystania staje się bardzo cenna. W Dodatku wspominam o innych narzędziach i podaję adresy stron WWW, pod którymi można znaleźć więcej informacji na ich temat.

ŹRÓDŁA

Podczas pisania tej książki posługiwałem się materiałami przygotowanymi do prowadzonego przeze mnie wykładu z przedmiotu badania operacyjne. Te z kolei opracowałem na podstawie wiedzy wyniesionej z kilkuletnich studiów nad przedmiotem. Trudno jest podać konkretne pozycje literaturowe, na których się opierałem. Czuję się jednak w obowiązku wymienić te, które pamiętam z tytułu. Są to:

1. Bazaraa M.S., Sherali H.D., Shetty C.M., *Nonlinear Programming, Theory and Algorithms*, Wiley, New York–Chichester–Brisbane–Toronto–Singapore, 1993.
2. Grabowski W., *Programowanie matematyczne*, PWE, Warszawa 1980.
3. *Ekonometria i badania operacyjne. Zagadnienia podstawowe*, red. B. Guzik, Materiały Dydaktyczne AE w Poznaniu, Zeszyt 115, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 2002.
4. *Ekonometria i badania operacyjne. Zagadnienia podstawowe*, red. B. Guzik, Materiały Dydaktyczne AE w Poznaniu, Zeszyt 51, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 1999.
5. Runka H., *Programowanie matematyczne, część I, Programowanie liniowe*, Materiały Dydaktyczne AE w Poznaniu, Zeszyt 20, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 1997.

6. Runka H., *Programowanie matematyczne, część 2, Programowanie nieliniowe*, Materiały Dydaktyczne AE w Poznaniu, Zeszyt 18, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 1997.
7. *Badania operacyjne*, red. W. Sikora, PWE, Warszawa 2008.
8. Sysło M.M., Deo N., Kowalik J.S., *Algorytmy optymalizacji dyskretnej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1999.

WPROWADZENIE

Badania operacyjne to dziedzina wiedzy ściśle związana z teorią podejmowania decyzji. Dokładniej, zajmuje się wyznaczaniem metod (czyli algorytmów) pozwalających rozwiązywać problemy związane z podejmowaniem optymalnych decyzji. Badania operacyjne można również zdefiniować nieco inaczej, jako dziedzinę umożliwiającą wyznaczanie za pomocą modeli matematycznych metodyki rozwiązywania praktycznych problemów.

W powyższych definicjach nie zostały użyte słowa zarządzanie ani ekonomia – badania operacyjne bowiem znajdują zastosowanie w różnych dziedzinach życia. Z naszego punktu widzenia najistotniejsze są jednak, oczywiście, zastosowania ekonomiczne, dlatego to o nich przede wszystkim przeczytasz w dalszej części tej książki.

Z badaniami operacyjnymi ściśle wiąże się pojęcie **optymalizacji**, czyli wyznaczania najlepszych rozwiązań. Większość problemów, których rozwiązywania nauczysz się podczas lektury, jak i tych, z którymi spotkasz się w przyszłości, będzie polegać na minimalizacji bądź maksymalizacji pewnej funkcji (zwanej funkcją celu, o czym dalej). Warto jednak pamiętać, że nie wszystkie zagadnienia są formułowane i rozwiązywane na zasadzie optymalizacji – niekiedy interesuje nas wyłącznie otrzymanie rozwiązania **lepszego niż aktualne** albo **wystarczająco dobrego**. W niniejszej książce koncentrujemy się jednak przede wszystkim na optymalizacji.

Na pewno wiesz co nieco o przypadkach optymalizacji obserwowanej w przyrodzie (choć nie zawsze uświadamianej). Wymieńmy trzy przykłady. Teoria ewolucji, najlepiej udokumentowana teoria dotycząca powstania obecnie znanego życia na Ziemi, opiera się na zasadzie doboru naturalnego – w skrócie (bardzo dużym) można ją opisać w ten sposób, że jednostki najsilniejsze przeżywają i przekazują swój materiał genetyczny dalej. Dzięki temu ostatecznie optymalizowane są poszczególne elementy organizmów, na przykład drapieżniki mają kły i pazury, latające ptaki zaś – skrzydła. Na podobnej zasadzie (doboru naturalnego) działają algorytmy genetyczne, o których przeczytasz dalej w tej książce. Innym przykładem optymalizacji może być konstrukcja nici DNA i RNA – każda z nich jest zbudowana z czterech zasad, które trójkami kodują aminokwasy. Daje to 64 możliwe kody, co okazuje się najtańszym (z punktu widzenia liczby użytych zasad) rozwiązaniem gwarantującym zakodowanie wszystkich niezbędnych aminokwasów i zapewniającym bardzo małe ryzyko związane z przypadkowymi mutacjami. Za trzeci przykład mogą posłużyć zachowania owadów społecznych. Mrówki potrafią skutecznie znajdować najkrótsze trasy z mrowiska do źródła pożywienia, pszczoły zaś przy konstrukcji plastrów miodu minimalizują ilość zużytego materiału, wykorzystując jako podstawę kształt sześciokąta foremnego. Wszystkie te zjawiska wytworzyły się

oczywiście po wielu milionach lat przystosowań i jako takie nie mają wiele wspólnego z optymalizacją stosowaną przez człowieka – uświadomioną i opierającą się w dużej mierze na zdobyczach matematyki wyższej. Zdarza się jednak, że zasady ich działania są używane do konstruowania algorytmów stosowanych do rozwiązywania zagadnień z zakresu badań operacyjnych (na przykład wspomniane już algorytmy genetyczne, algorytmy oparte na tzw. inteligencji roju, w tym mrówkowe, czy też sztuczne sieci neuronowe).

Początków optymalizacji w dzisiejszym znaczeniu tego słowa należy się doszukiwać w starożytności. Już wtedy decydenci starali się minimalizować koszty lub czas wykonywanych przedsięwzięć (gospodarczych bądź wojennych) albo maksymalizować osiągnane przychody. Można również wskazać mniej oczywiste problemy optymalizacyjne, które rozwiązywano prawdopodobnie bez znajomości dzisiejszych, szybkich metod. Wymieńmy tylko dwa z nich: optymalizację przedsięwzięć i zagadnienie pokrycia. Zarządzanie projektem (czyli inaczej optymalizacja przedsięwzięcia) na bardzo dużą skalę miało miejsce chociażby podczas budowy piramid i w trakcie wykonywania innych potężnych projektów budowlanych w starożytnym Egipcie. Zagadnienie pokrycia musieli z kolei rozwiązywać w praktyce starożytni Rzymianie – rozrastanie się Imperium uniemożliwiała stacjonowanie legionów we wszystkich prowincjach, należało je ponadto grupować tak, aby tworzyły silniejsze armie. Problem sprowadzał się więc do tego, aby umieszczając armie w jak najmniejszej liczbie prowincji, zapewnić możliwość ich dotarcia do wszystkich prowincji w ustalonym, krótkim czasie.

Badania operacyjne i optymalizacja w dzisiejszym rozumieniu tych pojęć pojawiały się sporadycznie od początku XX wieku, jednak ich prawdziwy rozkwit nastąpił podczas II wojny światowej – znalazły zastosowania militarne (stąd zresztą pochodzi nazwa badania operacyjne). Do jednych z ciekawszych osiągnięć badań operacyjnych z tamtego okresu zaliczyć można optymalizację wielkości konwojów morskich płynących z USA do ZSRR, tak aby minimalizować odsetek BRT statków zatopianych przez U-Boaty.

Dzisiaj badania operacyjne znajdują swoje zastosowanie w zasadzie we wszystkich dziedzinach życia. Wśród zastosowań ekonomicznych, które interesują nas najbardziej, wymienić należy przede wszystkim zastosowania w finansach (na przykład optymalizacja składu portfela), logistyce (na przykład optymalizacja dostaw i dystrybucji, zarządzanie zapasami), zarządzaniu projektami (na przykład harmonogramy) i przetwarzaniu danych.

Z badaniami operacyjnymi wiąże się pojęcie **algorytmu**. Można go zdefiniować jako skończony ciąg czynności, które należy wykonać, aby rozwiązać określony problem. Samo słowo „algorytm” pochodzi od nazwiska perskiego uczonego z VIII–IX wieku Al-Chwarizmi, który między innymi spopularyzował cyfry arabskie w świecie zachodnim i pierwszy stablicował funkcje trygonometryczne. Dziedzina wiedzy zajmująca się algorytmami i optymalizacją w wąskim

znaczeniu to **programowanie matematyczne**. Jeżeli rozszerzymy optymalizację z modeli matematycznych na rzeczywiste zastosowania, otrzymamy obszar, którym zajmują się badania operacyjne.

Mając dany problem (na przykład ekonomiczny), jego rozwiązanie na gruncie badań operacyjnych następuje w kilku krokach, które krótko omawiam poniżej.

1. **Sformułowanie problemu w języku naturalnym.** Na tym etapie należy zdefiniować dokładnie, na czym polega problem, a więc określić, co mamy zamiar optymalizować (na przykład minimalizować koszt lub czas trwania projektu albo maksymalizować zysk) oraz jakie występują ograniczenia (czasowe, zasobowe, kadrowe, finansowe itd.). Należy też określić, które wielkości wymagają ustalenia, czyli które są zmiennymi decyzyjnymi (na przykład wielkość produkcji bądź daty rozpoczęcia poszczególnych składowych projektu).
2. **Stworzenie modelu matematycznego.** Przypisując poszczególne elementy modelu zmiennym i parametrom, zapisujemy związki między nimi za pomocą równań i nierówności. Wskazujemy też, które wielkości mają dążyć do minimum albo maksimum. Model matematyczny nazywamy często zadaniem decyzyjnym.
3. **Dobór odpowiedniej metody i rozwiązanie zadania.** W tym miejscu korzystamy z dorobku programowania matematycznego. Do danego modelu matematycznego problemu decyzyjnego możemy dopasować odpowiednią metodę i rozwiązać zadanie. Z punktu widzenia badań operacyjnych zagadnienie ustalenia optymalnego asortymentu produkcji i zagadnienie optymalnej diety dla posiadanej trzody to całkiem różne problemy. Z punktu widzenia programowania matematycznego ich modele mają postać zadań programowania liniowego, więc stanowią ten sam typ zagadnienia i mogą być rozwiązane tymi samymi metodami. Niekiedy będzie konieczne wypracowanie własnej metody. Biorąc pod uwagę stopień rozwoju programowania matematycznego i badań operacyjnych, w takiej sytuacji najprawdopodobniej wystarczy, jeśli połączysz kilka znanych algorytmów.
4. **Przetłumaczenie rozwiązania na język naturalny.** Postępujemy odwrotnie niż w punkcie 2. Rozwiązanie postaci „ $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ ” wyrażamy za pomocą pojęć, które odzwierciedlają faktyczne znaczenie poszczególnych zmiennych.
5. **Analiza wrażliwości.** Jest to zespół czynności pozwalających ocenić, jak zmienia się rozwiązanie optymalne wraz ze zmianą parametrów. Analiza wektorowa odpowiada na pytanie, co się stanie z rozwiązaniem optymalnym, gdy jeden lub więcej parametrów przyjmie określone wartości. Analiza przedziałowa z kolei informuje o tym, jak może się zmieniać wybrany parametr, aby rozwiązanie optymalne nie uległo

zmianie. Oba typy analizy wrażliwości uzupełniają się, nie można jednoznacznie stwierdzić, że któryś z nich jest lepszy bądź pełniejszy.

6. **Wdrożenie.** Otrzymane rozwiązanie należy wdrożyć w rzeczywistym systemie. Jest to etap, którym nie będziemy się zajmować.

Zadania decyzyjne można sklasyfikować na wiele sposobów. Dla przykładu przytoczę trzy z nich.

1. Ze względu na charakter powiązań występujących w zadaniu wyróżniamy **zadania programowania liniowego (PL)** i **zadania programowania nieliniowego (PN)**. Zadania PL charakteryzują się tym, że wszystkie powiązania (równania i nierówności) mają postać funkcji liniowych. Jeżeli chociaż jedna z rozpatrywanych funkcji jest nieliniowa, mamy do czynienia z zadaniem PN.
2. Ze względu na charakter parametrów wyróżniamy **zadania deterministyczne** (w których wartości wszystkich parametrów są z góry znane), **zadania programowania w warunkach ryzyka** (w których przynajmniej jeden z parametrów nie jest znany, ale jest zmienną losową o znanym lub możliwym do oszacowania rozkładzie) i **zadania programowania w warunkach niepewności** (w których przynajmniej jeden parametr jest zmienną losową o nieznanym i niemożliwym do oszacowania rozkładzie).
3. Ze względu na liczbę kryteriów wyróżniamy zadania programowania **jednokryterialnego** i zadania programowania **wielokryterialnego** (niekiedy mówimy o optymalizacji **jednocelowej i wielocelowej**).

Elementami problemu decyzyjnego są **zmiennie decyzyjne** i **parametry**. Zmiennym przypisujemy wielkości, które chcemy ustalić, na przykład wielkość produkcji poszczególnych wyrobów czy też moment dostawy towaru do magazynu. Parametry to wartości, których wielkość nie zależy od decydenta (przynajmniej w okresie, który dotyczy danego problemu decyzyjnego), na przykład ceny, zasoby surowców, popyt na wyroby gotowe itp. Za pomocą zmiennych i parametrów, przy wykorzystaniu różnych funkcji, zapisuje się równania i nierówności, opisujące ograniczenia, czyli tak zwane **warunki ograniczające**. Zapisuje się też jedną lub więcej funkcji, której wartość ma być minimalizowana lub maksymalizowana. Mowa tu o **funkcji celu** (funkcjach celu) lub inaczej **funkcji kryterium** (funkcjach kryterium). Rozwiązania, które spełniają wszystkie warunki ograniczające, tworzą **zbiór rozwiązań dopuszczalnych (ZRD)**. To spośród rozwiązań dopuszczalnych, które maksymalizuje (bądź minimalizuje, w zależności od przyjętych założeń) wartość funkcji celu, nazywamy **rozwiązaniem optymalnym**. Uwaga: problem decyzyjny może mieć więcej niż jedno rozwiązanie optymalne (nawet nieskończenie wiele). Może się też zdarzyć, że nie istnieją żadne rozwiązania optymalne. Sytuacja taka może zajść z jednego z dwóch powodów. Pierwszy

z nich zachodzi, gdy zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest pusty, czyli gdy układ równań i nierówności będących warunkami ograniczającymi jest sprzeczny. Mówimy wówczas, że zadanie jest **sprzeczne**. Druga możliwa przyczyna to sytuacja, gdy zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest nieograniczony w kierunku, w którym polepsza się wartość funkcji celu. W takim wypadku funkcja celu może być maksymalizowana do plus nieskończoności lub minimalizowana do minus nieskończoności. Zadanie ma wówczas rozwiązania dopuszczalne, jednak nie ma optymalnego (gdyż dla dowolnego rozwiązania można wskazać rozwiązanie lepsze od niego). W takiej sytuacji mówimy, że zadanie jest **rozbieżne**.

ZAGADNIENIA DO POWTÓRZENIA

1. Wymień i omów sposoby klasyfikacji zadań decyzyjnych.
2. Wymień i omów etapy rozwiązywania zadań na gruncie badań operacyjnych.
3. Wymień i omów składowe problemu decyzyjnego.