

Roman **Leitner**

**Zarys
matematyki
wyższej
dla studentów**

część

1

Wydawnictwo WNT



**Zarys
matematyki
wyższej
dla studentów**

Roman **Leitner**

**Zarys
matematyki
wyższej
dla studentów**

część

1

Wydawnictwo WNT



Opiniodawca: *Bolesław Palczewski*
Redaktor wyd. XIII: *Lilianna Szymańska*
Okładkę projektował: *Przemysław Spiechowski*
Redaktor techniczny: *Grażyna Miazek*
Wydawca: *Karol Zawadzki*

Książka, którą nabyłeś, jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy, abyś przestrzegał praw, jakie im przysługują. Jej zawartość możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym. Ale nie publikuj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. A kopiując jej część, rób to jedynie na użytek osobisty.

Szanujmy cudzą własność i prawo
Więcej na www.legalnakultura.pl
Polska Izba Książki

Copyright © by Wydawnictwo WNT
Warszawa 1994, 1995, 1997, 1999, 2001, 2006
Copyright © by Wydawnictwo Naukowe PWN SA
Warszawa 2016

ISBN 978-83-01-18823-8 całość
ISBN 978-83-01-18953-2 część 1

Wydanie XIII – 1 dodruk (PWN)
Warszawa 2016

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
02-460 Warszawa, ul. Gottlieba Daimlera 2
tel. 22 69 54 321, faks 22 69 54 288
infolinia 801 33 33 88
e-mail: pwn@pwn.com.pl; reklama@pwn.pl
www.pwn.pl

Druk i oprawa: OSDW Azymut Sp. z o.o.

Spis treści

Przedmowa do wydania szóstego	9
Rozdział 1 Logika	11
§ 1 Rachunek zdań	11
§ 2 Tautologie. Reguły wnioskowania	14
§ 3 Funkcje zdaniowe. Kwantyfikatory	17
§ 4 Algebra abstrakcyjna. Algebra Boole'a. Struktury algebraiczne	20
Rozdział 2 Liczby, zbiory, odwzorowania, symbole	26
§ 5 Liczby naturalne. Zasada indukcji zupełnej	26
§ 6 Liczby całkowite i wymierne. Systemy pozycyjne	28
§ 7 Liczby rzeczywiste	31
§ 8 Działania na zbiorach. Produkt kartezjański	37
§ 9 Zbiory liczb. Kres górny, kres dolny	40
§ 10 Odwzorowania (funkcje)	42
§ 11 Typy odwzorowań (ciągi, funkcje, pola, przekształcenia)	47
§ 12 Symbole sumy, iloczynu i silni. Symbol Newtona. Wzór Newtona	55
§ 13 Przestrzeń metryczna	61
§ 14 Moc zbioru	63
Rozdział 3 Równania liniowe, macierze, wyznaczniki	65
§ 15 Funkcja liniowa. Zależność liniowa	65
§ 16 Układ równań liniowych. Macierz układu. Metoda eliminacji Gaussa	74
§ 17 Wyznaczniki (wiadomości podstawowe)	84
§ 18 Wzory Cramera	91
§ 19 Warunek Kroneckera-Capellego	94
§ 20 Układy jednorodne	99

6 Spis treści

Rozdział 4	Wektory w przestrzeni geometrycznej	103
§ 21	Definicja wektora. Dodawanie i odejmowanie wektorów. Mnożenie wektora przez liczbę. Kombinacja liniowa wektorów	103
§ 22	Rzut równoległy wektora	112
§ 23	Rozkład wektora na składowe. Baza. Wersory	117
§ 24	Iloczyn skalarny. Iloczyn wektorowy. Iloczyn mieszany. Iloczyny podwójne	121
§ 25	Zastosowanie współrzędnych do działań na wektorach w przestrzeni	129
§ 26	Zastosowanie współrzędnych do działań na wektorach na płaszczyźnie	139
§ 27	Translacje i obroty. Zmiana układu współrzędnych. Współrzędne biegunowe, cylindryczne i sferyczne	145
Rozdział 5	Proste i płaszczyzny	153
§ 28	Prosta na płaszczyźnie	153
§ 29	Zagadnienia dotyczące prostej na płaszczyźnie	160
§ 30	Prosta w przestrzeni	169
§ 31	Płaszczyzna w przestrzeni	172
§ 32	Zagadnienia dotyczące prostej i płaszczyzny w przestrzeni	177
Rozdział 6	Ciągi i szeregi liczbowe	184
§ 33	Ciąg liczbowy i jego granica	184
§ 34	Działania na ciągach i ich granicach. Symbole nieoznaczone	191
§ 35	Warunki zbieżności ciągu	195
§ 36	Liczba $e = 2,718281\dots$	199
§ 37	Sumowanie wyrazów ciągu	200
§ 38	Szereg liczbowy i jego suma	203
§ 39	Kryteria zbieżności szeregów	206
§ 40	Zbieżność bezwzględna i zbieżność warunkowa	211
§ 41	Mnożenie szeregów	212
Rozdział 7	Funkcje jednej zmiennej (granice, pochodne)	216
§ 42	Granica funkcji	216
§ 43	Warunki istnienia granicy funkcji	227
§ 44	Działania na funkcjach i ich granicach. Symbole nieoznaczone	232
§ 45	Ciągłość funkcji	237
§ 46	Badanie funkcji za pomocą granic. Asymptoty funkcji	243
§ 47	Pochodna funkcji	246
§ 48	Geometryczny sens pochodnej	250
§ 49	Fizyczny sens pochodnej	252
§ 50	Istnienie pochodnej a ciągłość i różniczkowalność	255
§ 51	Działania na funkcjach i ich pochodnych	258

§ 52	Funkcje elementarne	264
§ 53	Skale funkcyjne. Wykresy empiryczne	273
§ 54	Metoda najmniejszych kwadratów	278
Rozdział 8	Funkcje jednej zmiennej (przyrosty, różniczki, ekstrema)	280
§ 55	Przyrosty i różniczki	280
§ 56	Ekstremum funkcji	282
§ 57	Twierdzenia o przyrostach	286
§ 58	Badanie funkcji za pomocą pierwszej pochodnej (przedziały monotoniczności, ekstrema)	289
§ 59	Reguła de l'Hospitala	293
§ 60	Pochodne wyższych rzędów	295
§ 61	Wzór Taylora z drugą pochodną	297
§ 62	Badanie funkcji za pomocą pierwszej i drugiej pochodnej (ekstrema, wypukłość, przegięcie)	299
§ 63	Wzór Taylora z n -tą pochodną	304
§ 64	Badanie funkcji za pomocą wyższych pochodnych	307
§ 65	Rozwijanie funkcji w szereg Taylora	311
Rozdział 9	Funkcje dwóch zmiennych	316
§ 66	Granica i ciągłość funkcji dwóch zmiennych	316
§ 67	Pochodne cząstkowe funkcji dwóch zmiennych	323
§ 68	Przyrosty i różniczki funkcji dwóch zmiennych	327
§ 69	Pochodna funkcji złożonej	330
§ 70	Wzór Taylora dla funkcji dwóch zmiennych	334
§ 71	Ekstremum funkcji dwóch zmiennych	335
§ 72	Pochodna kierunkowa i gradient funkcji dwóch zmiennych	340
Rozdział 10	Funkcje wielu zmiennych	342
§ 73	Funkcje trzech zmiennych	342
§ 74	Pochodne cząstkowe i różniczki funkcji trzech zmiennych	344
§ 75	Twierdzenie o przyrostach i wzór Taylora dla funkcji trzech zmiennych	347
§ 76	Ekstremum funkcji trzech zmiennych	348
§ 77	Pochodna kierunkowa i gradient funkcji trzech zmiennych	349
§ 78	Pole skalarne zmienne w czasie	351
§ 79	Funkcje n zmiennych	351
Rozdział 11	Funkcje uwikłane. Ekstremum warunkowe	358
§ 80	Funkcje uwikłane jednej zmiennej	358
§ 81	Funkcje uwikłane wielu zmiennych	365
§ 82	Układ funkcji uwikłanych. Jakobian	366
§ 83	Ekstremum warunkowe. Mnożniki Lagrange'a	368

Rozdział 12	Krzywe na płaszczyźnie i w przestrzeni	373
§ 84	Krzywa na płaszczyźnie	373
§ 85	Styczna i normalna do krzywej na płaszczyźnie. Pochodna wektora	377
§ 86	Stożkowe w układzie prostokątnym	381
§ 87	Stożkowe w układzie biegunowym	401
§ 88	Badanie linii drugiego stopnia	403
§ 89	Środek krzywizny. Ewoluta, ewolwenta	407
§ 90	Obwiednia rodziny krzywych	412
§ 91	Krzywa w przestrzeni	416
Rozdział 13	Powierzchnie	420
§ 92	Wektor normalny i płaszczyzna styczna do powierzchni	420
§ 93	Powierzchnie obrotowe	424
§ 94	Powierzchnie walcowe i powierzchnie stożkowe	427
§ 95	Kwadryki	430
§ 96	Klasyfikacja kwadryk	433
	Skorowidz nazwisk	439
	Skorowidz rzeczowy	440

Przedmowa do wydania szóstego

Szóste wydanie *Zarysu matematyki wyższej* różni się znacznie od wydań poprzednich i jest właściwie nową książką. Pierwsza jej część obejmuje materiał pierwszej i drugiej części poprzednich wydań oraz kilka nowych rozdziałów. Druga część książki zawierać będzie resztę materiału poprzednich wydań i sporo nowych rozdziałów.

Tak znaczne skondensowanie materiału uzyskano dzięki temu, że uwzględniając nowy program matematyki w szkołach średnich i zakładając lepsze przygotowanie Czytelnika do rozważań abstrakcyjnych, ograniczono rozważania wstępne oraz zwiększono precyzję i zwięzłość wypowiedzi. Zachowano jednak taki układ materiału, aby książka była zrozumiała także dla Czytelnika, który ukończył szkołę średnią według dawnego programu.

Wykład jest sekwencją definicji, twierdzeń z dowodami i przykładów. Definicje różnią się od innych wypowiedzi tym, że zawierają zwroty: „oznacza, że”, „nazywa się”, „mówimy, że” lub „nazywamy”, a nowo wprowadzany termin wydrukowany jest pismem pochyłym (kursywą). Twierdzenia wyróżniono w książce kursywą i poprzedzono numerami odbitymi półgrubą czcionką. Po twierdzeniach następują dowody. Znak ■ oznacza koniec dowodu. Fragmenty książki, które przy pierwszym czytaniu można pominąć, oznaczono gwiazdkami.

W celu opanowania materiału podanego w książce Czytelnik powinien samodzielnie rozwiązać znaczną liczbę zadań, korzystając ze zbiorów, których wykaz podano na końcu książki.

Warszawa, luty 1976 r.

ROMAN LEITNER

1

Logika

§ 1. Rachunek zdań

Zdanie. Przedmiotem logiki są związki między zdaniami. Przez *zdanie* rozumiemy w logice wypowiedź oznajmującą i sensowną, tj. taką, której w ramach danej nauki można przypisać ocenę prawdziwości albo fałszu i tylko jedną z tych dwóch ocen.

Ocenę prawdziwości oznaczamy cyfrą 1, ocenę fałszu cyfrą 0. Zdania oznaczamy literami p, q, r, \dots . Jeśli p jest zdaniem prawdziwym, to mówimy, że wartość logiczna zdania p jest równa 1 i piszemy

$$w(p) = 1$$

Jeśli p jest zdaniem fałszywym, to mówimy, że wartość logiczna zdania p jest równa 0 i piszemy

$$w(p) = 0$$

Nie dopuszczamy innych wartości zdania niż 0 i 1, czyli rozważamy *logikę dwuwartościową*.

Zmienna zdaniowa. Literę, która może oznaczać dowolne zdanie (z zakresu danej nauki) nazywamy *zmienną zdaniową*. Zmienna zdaniowa może mieć wartość logiczną 1 lub 0 zależnie od tego jakie zdanie oznacza. Jeśli za zmienną zdaniową p podstawiono zdanie prawdziwe, to mówimy, że dokonano podstawienia $p = 1$, jeśli zaś za p podstawiono zdanie fałszywe, to mówimy, że podstawiono $p = 0$.

Zmienna nazwowa. W matematyce rozważamy zbiory liczb, zbiory funkcji, zbiory figur itp. Literę oznaczającą dowolny element takiego zbioru nazywamy *zmienną nazwową* (*indywidualną*).

Zdania złożone. Zdania złożone tworzymy w logice ze zdań składowych za pomocą *spójników logicznych*. Istnieje kilkanaście spójników logicznych, z których najważniejszymi i wystarczającymi dla potrzeb matematyki są

$$\text{nie} \quad \text{i} \quad \text{lub} \quad \text{implikuje} \quad \text{jest równoważne} \quad (1.1)$$

Spójniki te oznaczamy symbolami

$$\sim \quad \wedge \quad \vee \quad \Rightarrow \quad \Leftrightarrow \quad (1.2)$$

12 Rozdział 1 LOGIKA

Zdania złożone, utworzone za pomocą tych spójników ze zdań p, q , podane są w następującej tabelicy

	Nazwa	Zapis ¹⁾	Sposób odczytania ²⁾
1	Negacja (zaprzeczenie)	$\sim p$	nie p
2	Koniunkcja (iloczyn logiczny)	$p \wedge q$	p i q
3	Alternatywa (suma logiczna)	$p \vee q$	p lub q
4	Implikacja (wynikanie)	$p \Rightarrow q$	p implikuje q
5	Równoważność (ekwiwalencja)	$p \Leftrightarrow q$	p jest równoważne q

Zdania składowe (człony), z których zbudowane jest zdanie złożone, nazywamy:

- *czynnikami* w przypadku koniunkcji,
- *składnikami* w przypadku alternatywy,
- *poprzednikiem* i *następnikiem* w przypadku implikacji.

Treść logiczną negacji, koniunkcji, alternatywy, implikacji i równoważności zdefiniujemy za pomocą *tabel zerojedynkowych*. Tabele takie podają wartości logiczne zdań złożonych w zależności od tego jakie są wartości logiczne zdań składowych.

Negację definiujemy za pomocą następującej tabeli

p	$\sim p$
1	0
0	1

Z tabeli tej odczytujemy, że negacja zdania p jest:

- fałszywa, gdy zdanie p jest prawdziwe,
- prawdziwa, gdy zdanie p jest fałszywe.

Pozostałe cztery zdania złożone definiujemy za pomocą tabeli

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

¹⁾ Inne sposoby zapisu: negacji $\neg p$, koniunkcji $p \cdot q$, alternatywy $p + q$, implikacji $p \rightarrow q$, $p \supset q$, równoważności $p \equiv q$, $p \leftrightarrow q$, $p \rightleftarrows q$, $p \sim q$.

²⁾ Inne sposoby odczytania: negacji — „nieprawdą jest, że p ”, implikacji — „jeśli p , to q ”, „z p wynika q ”, „ p pociąga q ”, „ p jest warunkiem wystarczającym dla q ”, „ q jest warunkiem koniecznym dla p ”, równoważności — „ p jest warunkiem koniecznym i wystarczającym dla q ”, „ p jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy gdy q jest prawdziwe”.

Z tabeli tej odczytujemy, że:

- koniunkcja jest prawdziwa, gdy oba czynniki koniunkcji są prawdziwe, w pozostałych przypadkach jest fałszywa;
- alternatywa jest fałszywa, gdy oba składniki alternatywy są fałszywe, w pozostałych przypadkach jest prawdziwa;
- implikacja jest prawdziwa, gdy poprzednik i następnik są prawdziwe, a także wtedy, gdy poprzednik jest fałszywy (co wyrażamy, mówiąc: *z prawdy prawda wynika oraz z fałszu zarówno prawda jak i fałsz mogą wynikać*); implikacja jest fałszywa, gdy poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy (co wyrażamy, mówiąc: *z prawdy fałsz nie wynika*);
- równoważność dwóch zdań jest prawdziwa, gdy zdania te mają jednakową wartość logiczną; w przeciwnym przypadku równoważność tych zdań jest fałszywa. Implikacji nie należy utożsamiać z wnioskowaniem. Implikację można tworzyć ze zdań nie pozostających w związku przyczynowym, co więcej, implikacja taka jest prawdziwa, gdy oba te zdania są fałszywe. Natomiast *wnioskowanie* polega na tym, że ze zdania uznanego za prawdziwe wyprowadzamy nowe zdanie prawdziwe. Wnioskowanie jest odpowiednikiem tego przypadku implikacji, w którym poprzednik i następnik są prawdziwe.

Spójniki logiczne zaliczamy do *funktorów zdaniotwórczych*¹⁾ i nazywamy odpowiednio: funktorem negacji, funktorem koniunkcji, funktorem alternatywy, funktorem implikacji i funktorem równoważności. Pierwszy z tych funktorów jest jednoargumentowy, gdyż odnosi się do jednego zdania, pozostałe są dwuargumentowe, gdyż odnoszą się do pary zdań.

Nawiasy i kolejność stosowania funktorów. Aby zapewnić sobie jednoznaczność odczytu zdania złożonego, którego człony są również zdaniami złożonymi, wprowadzamy podobnie jak w arytmetyce, nawiasy np.

$$[p \vee (\sim q)] \Leftrightarrow [\sim(p \vee q) \Rightarrow (q \wedge r)] \quad (1.3)$$

Aby zaś uniknąć nadmiaru nawiasów, przyjmujemy umowę, że tam, gdzie nie ma nawiasów, kolejność stosowania poszczególnych funktorów powinna być zgodna z kolejnością wymienienia ich w (1.2). Mówimy, że znak negacji wiąże się ze zmienną zdaniową mocniej niż pozostałe 4 znaki, a znak koniunkcji wiąże się mocniej niż znaki alternatywy, implikacji i równoważności itd. Dzięki tej umowie wyrażenie (1.3) może być zapisane w postaci

$$p \vee \sim q \Leftrightarrow \sim(p \vee q) \Rightarrow q \wedge r \quad (1.4)$$

Symbolika beznawiasowa Łukasiewicza²⁾. W symbolice tej funktory (1.1) oznaczane są literami *N, K, A, C, E*, które pisze się przed argumentami tych funktorów. Tak więc alternatywę $p \vee q$ zapisujemy w postaci Apq , alternatywę $p \vee \sim q$ w postaci $ApNq$, a wyrażenie (1.4) w postaci

$$EApNqCNApqKqr$$

¹⁾ Także kwantyfikatory (§ 3) są funktorami zdaniotwórczymi.

²⁾ Jan Łukasiewicz (1878–1956), logik polski.

Obliczanie wartości logicznej formuły rachunku zdań. Dowolny napis utworzony ze zmiennych zdaniowych i symboli spójników logicznych, który po podstawieniu za zmienne dowolnych zdań staje się zdaniem (prawdziwym lub fałszywym), nazywamy *formułą rachunku zdań*. Wartość logiczna każdej formuły rachunku zdań na ogół zależy od wartości logicznych jej członów.

Przykład 1.1. Formuła rachunku zdań

$$p \vee \sim q$$

po podstawieniu $p = 0, q = 1$ ma wartość logiczną

$$0 \vee \sim 1 = 0 \vee 0 = 0$$

Ta sama formuła dla $p = 0, q = 0$ ma wartość logiczną

$$0 \vee \sim 0 = 0 \vee 1 = 1$$

Przykład 1.2. Formuła $p \vee \sim p$ przy każdym podstawieniu przyjmuje wartość 1, bowiem

$$\text{dla } p = 1 \text{ jest } 1 \vee \sim 1 = 1 \vee 0 = 1$$

$$\text{dla } p = 0 \text{ jest } 0 \vee \sim 0 = 0 \vee 1 = 1$$

§ 2. Tautologie. Reguły wnioskowania

Tautologie. Formułę rachunku zdań, która przy podstawieniu za zmienne zdaniowe dowolnych zdań prawdziwych lub fałszywych staje się zawsze zdaniem prawdziwym, nazywamy *tautologią*. Aby zaznaczyć, że formuła F jest tautologią, można posłużyć się znakiem \vdash (który odczytujemy: *zawsze prawdą jest, że*) i napisać $\vdash F$. Istnieje nieskończenie wiele tautologii; są one w logice tym, czym tożsamości np. algebraiczne lub trygonometryczne w matematyce. Niektóre tautologie były znane już w starożytności i w średniowieczu i uważano je za *podstawowe prawa logiki*. Poniżej formułujemy kilkanaście najważniejszych tautologii, przy czym litery P, Q, R oznaczają dowolne formuły rachunku zdań, a obok podajemy nazwy tych tautologii

$P \vee \sim P$	prawo wyłączonego środka ¹⁾
$\sim (P \wedge \sim P)$	prawo niesprzeczności
$P \wedge P \Leftrightarrow P$	idempotentność koniunkcji
$P \vee P \Leftrightarrow P$	idempotentność alternatywy
$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	przemienność koniunkcji
$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	przemienność alternatywy
$P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$	łączność koniunkcji
$P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$	łączność alternatywy
$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow P \wedge Q \vee P \wedge R$	rozdzielność koniunkcji względem alternatywy
$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	rozdzielność alternatywy względem koniunkcji
$\sim (\sim P) \Leftrightarrow P$	podwójna negacja
$\sim (P \wedge Q) \Leftrightarrow \sim P \vee \sim Q$	negacja koniunkcji ²⁾
$\sim (P \vee Q) \Leftrightarrow \sim P \wedge \sim Q$	negacja alternatywy ²⁾
$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow Q \vee \sim P$	związek implikacji z alternatywą

¹⁾ tertium non datur.

²⁾ Prawa negacji koniunkcji i negacji alternatywy nazywane są *prawami de Morgana*. A. de Morgan (1806–1871), logik angielski.