

Zatem HB umożliwia liniową interpolację odwrotności funkcji przeżycia. W szczególności dla  $n = 0$  otrzymujemy:

$${}_u p_x = \frac{p_x}{u + (1-u) \cdot p_x} \quad (1.68)$$

$${}_u q_x = \frac{u \cdot q_x}{u + (1-u) \cdot p_x} \quad (1.69)$$

Podobnie jak w HCFM zmienne  $S_x$  i  $K_x$  nie są niezależne.

Najważniejsze zależności dla rozkładu przyszłego czasu życia wynikające z przyjętej hipotezy interpolacyjnej zestawiono w tabeli 1.

**Tabela 1. Zależności między prawdopodobieństwem przeżycia, zgonu i intensywnością śmiertelności dla różnych hipotez interpolacyjnych**

	HU	HCFM	HB
${}_u p_x$	$1 - u \cdot q_x$	$(p_x)^u$	$\frac{p_x}{1 - (1-u)q_x}$
${}_u q_x$	$u \cdot q_x$	$1 - (p_x)^u$	$\frac{u \cdot q_x}{1 - (1-u)q_x}$
$\mu_x(u)$	$\frac{q_x}{1 - u \cdot q_x}$	$-\ln p_x$	$\frac{q_x}{1 - (1-u)q_x}$

Źródło: opracowanie własne.

## Uogólniona hipoteza interpolacyjna

Przedstawione wyżej hipotezy interpolacyjne można uogólnić przez wprowadzenie dodatkowego parametru  $\alpha_x$ , zależnego od wieku, który pozwala elastycznie dopasować sposób interpolacji rozkładu przyszłego czasu życia w różnych przedziałach wiekowych (Jones i Mereu, 2000). Intensywność śmiertelności w uogólnionej hipotezie interpolacyjnej przyjmuje postać:

$$\mu_x(n+u) = \begin{cases} \frac{1 - (p_{[x]+n})^{\alpha_x}}{\alpha_x [1 - u + u \cdot (p_{[x]+n})^{\alpha_x}]}, & \alpha_x \neq 0 \\ -\ln p_{[x]+n}, & \alpha_x = 0 \end{cases} \quad (1.70)$$

Tradycyjne hipotezy interpolacyjne są szczególnym przypadkiem uogólnionej hipotezy, wzór 1.70 redukuje się bowiem:

- dla  $\alpha_x = 1$  do HU (1.57),
- dla  $\alpha_x = 0$  do HCFM (1.61),
- dla  $\alpha_x = -1$  do HB (1.66).

Znak parametru  $\alpha_x$  przesądza o nachyleniu intensywności śmiertelności w przedziale  $(n, n + 1)$ . Intensywność śmiertelności jest rosnąca dla  $\alpha_x > 0$ , malejąca dla  $\alpha_x < 0$  i stała dla  $\alpha_x = 0$ . Natomiast wartość bezwzględna  $\alpha_x$  decyduje o wielkości zmiany intensywności śmiertelności pomiędzy węzłami.

Równoważnie uogólnioną hipotezę można zapisać za pomocą prawdopodobieństwa przeżycia:

$${}_{n+u}p_x = \begin{cases} {}_n p_x \left[ 1 - u + u(p_{[x]+n})^{\alpha_x} \right]^{\frac{1}{\alpha_x}}, & \alpha_x \neq 0 \\ {}_n p_x (p_{[x]+n})^u, & \alpha_x = 0 \end{cases} \quad (1.71)$$

Analogicznie jak w przypadku intensywności śmiertelności wzór (1.71) upraszcza się:

- dla  $\alpha_x = 1$  do HU (1.56),
- dla  $\alpha_x = 0$  do HCFM (1.62),
- dla  $\alpha_x = -1$  do HB (1.65).

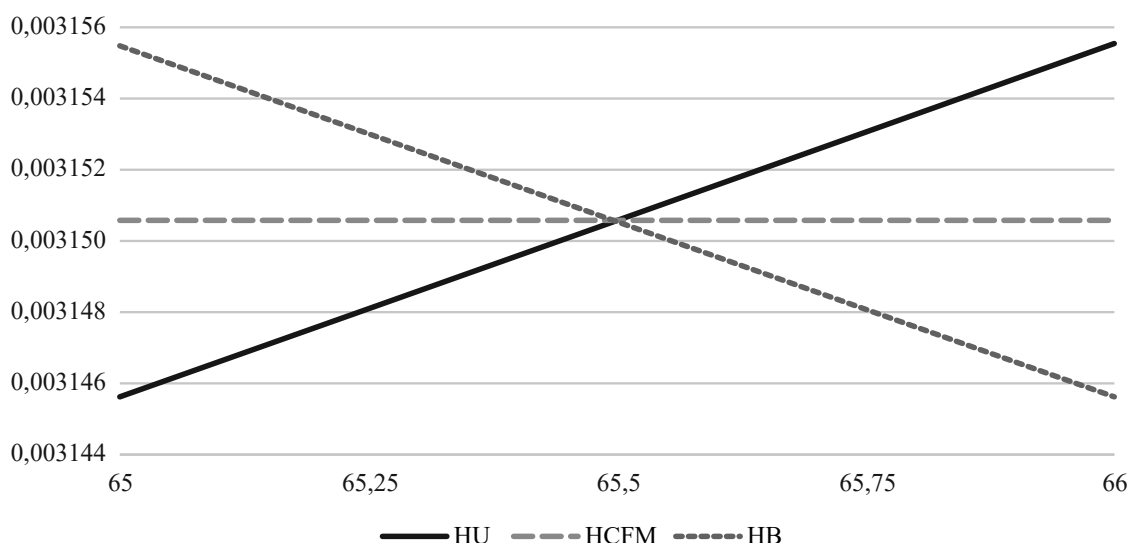
Hipotezy interpolacyjne są bardzo istotne z teoretycznego punktu widzenia, pozwalają bowiem na uzasadnienie sposobu wyznaczania wartości pośrednich podstawowych współczynników demograficznych. Natomiast z praktycznego punktu widzenia wybór konkretnej hipotezy interpolacyjnej nie ma większego znaczenia, ponieważ dają one podobne przybliżenia. W tabeli 2 zamieszczono wartości funkcji przeżycia  ${}_t p_0$  dla  $t \in [65, 66]$ , wyliczone dla różnych hipotez interpolacyjnych. Uzyskane prawdopodobieństwa różnią się od siebie niewiele, nie więcej niż o  $10^{-6}$ . Podobne wyniki otrzymuje się dla innych prawdopodobieństw brzegowych.

**Tabela 2. Interpolacja funkcji przeżycia  ${}_t p_0$  dla różnych hipotez interpolacyjnych**

$n + u$		65	65,25	65,5	65,75	66
$65 + u p_0$	HU	0,97596000	0,97519250	0,97442500	0,97365750	0,97289000
	HCFM	0,97596000	0,97519159	0,97442379	0,97365659	0,97289000
	HB	0,97596000	0,97519069	0,97442258	0,97365569	0,97289000

Prawdopodobieństwa brzegowe  ${}_{65}p_0$  i  ${}_{66}p_0$  dla mężczyzn w Polsce.

Źródło: obliczenia własne na podstawie: Human Mortality Database, 2018.



**Rys. 1. Interpolacja funkcji natężenia śmiertelności dla różnych hipotez interpolacyjnych**

Źródło: obliczenia własne na podstawie: Human Mortality Database, 2018.

Również intensywności zgonów interpolowane dla trzech omawianych hipotez różnią się w niewielkim zakresie. Rysunek 1 jest ilustracją graficzną funkcji natężenia śmiertelności dla różnych hipotez interpolacyjnych określonych dla mężczyzn w 65 roku życia. Dla HU natężenia zgonów rosną, dla HB maleją, a w przypadku HCFM są rzecz jasna funkcją stałą. Niemniej różnice na krańcach badanego przedziału nie przekraczają  $10^{-6}$ .

W praktyce aktuarialnej dane są często ograniczone dla wielkości  ${}_n p_0$  dla  $n = 0, 1, \dots$ , zatem znany jest obcięty czas życia 0-latka. Przyjmując hipotezę agregacji, można wyznaczyć  ${}_n p_x$  dla wszystkich dodatnich i całkowitych  $x$ , co jest równoznaczne z ustaleniem rozkładu obciętego czasu życia dla wszystkich  $x$ -latków. Hipotezy interpolacyjne pozwalają ustalić przebieg funkcji  ${}_n p_x$  w przedziałach  $(n, n + 1)$ , jedynie na podstawie wartości brzegowych  ${}_n p_x$  i  ${}_{n+1} p_x$ . Hipotezy interpolacyjne są sformułowane dla ustalonego wieku  $x$ -latka, ale zakłada się, że ta sama hipoteza obowiązuje dla wszystkich  $x \geq 0$ . Dzięki temu zyskuje się zgodność pomiędzy HJP a omawianymi hipotezami interpolacyjnymi. Zgodność oznacza, że oba poniższe sposoby ustalania  ${}_t p_x$ :

- w pierwszym kroku interpolacja funkcji  ${}_t p_0$ , a następnie wyznaczenie na podstawie HJP  ${}_t p_x = \frac{{}_t p_0 \cdot {}_x p_0}{{}_t p_0}$  dla wszystkich  $t \geq 0$ ,
- w pierwszym kroku wyliczenie na podstawie HA  ${}_n p_x$  dla  $x$  całkowitych dodatnich, a następnie przez interpolację wyznaczenie  ${}_t p_x$  dla pozostałych niecałkowitych  $t \geq 0$ ,

prowadzą do uzyskania tych samych wartości.

### 1.3. Tablice trwania życia

Kohorta to grupa wyodrębniona na podstawie wspólnie przeżytego zdarzenia demograficznego lub społecznego w ściśle określonym miejscu i czasie. Jeśli tym wspólnym wydarzeniem jest urodzenie, to kohortę nazywa się generacją.

Tablica trwania życia (TTŻ) jest liczbowym opisem wymierania kohorty lub generacji. Formalnie tablicą trwania życia, związaną z funkcją przeżycia  $s(t)$ , nazywamy zbiór liczb nieujemnych  $\{l_t\}_{t \geq 0}$  spełniających zależność:

$$s(t) = \frac{l_t}{l_0}, \quad t \geq 0 \quad (1.72)$$

gdzie  $l_0$  to początkowa liczebność kohorty, a  $l_t$  jest liczbą osób, które dożyją wieku  $t$ . Powyższa definicja może mieć zastosowanie zarówno do ciągłej, jak i dyskretnej zmiennej losowej opisującej czas życia.

Dla TTŻ spełniających zależność 1.72, można wyprowadzić następujące związki ze zmienną losową czasu życia  $T_0$ :

$$P(T_0 \leq t) = F_0(t) = 1 - s(t) = \frac{l_0 - l_t}{l_0} \quad (1.73)$$

$$P(T_0 > t + s | T_0 > s) = \frac{1 - F_0(s + t)}{1 - F_0(s)} = \frac{l_{s+t}}{l_s}, \quad l_s > 0 \quad (1.74)$$

$$E(T_0) = \dot{e}_0 = \int_0^\infty (1 - F_0(t)) dt = \int_0^\infty s(t) dt = \frac{1}{l_0} \int_0^\infty l_t dt \quad (1.75)$$

$$\mu_{[0]+t} = \mu_t = \frac{F'_0(t)}{1 - F_0(t)} = \frac{-s'(t)}{s(t)} = -\frac{1}{l_t} \frac{dl_t}{dt}, \quad l_t > 0 \quad (1.76)$$

Przyjęcie HJP pozwala na wyznaczenie z TTŻ dla wszystkich  $x$ -latków. Załóżmy bowiem, że zachodzi HJP oraz  $\{l_t\}_{t \geq 0}$  jest TTŻ, wówczas  $\{l_{x+t}\}_{t \geq 0}$  jest TTŻ  $x$ -latka, mamy więc:

$${}_t p_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_{x+t}}{l_x}, \quad l_x > 0 \quad (1.77)$$

Tym samym zależności opisane wzorami 1.74–1.76 można wyprowadzić dla rozkładów  $T_x$ :

$${}_t p_{x+s} = \frac{l_{x+s+t}}{l_{x+s}}, l_{x+s} > 0 \quad (1.78)$$

$$\dot{e}_x = \frac{1}{l_x} \int_x^\infty l_y dy, l_x > 0 \quad (1.79)$$

$$\mu_x(t) = -\frac{1}{l_{x+t}} \frac{dl_{x+t}}{dt}, l_{x+t} > 0 \quad (1.80)$$

Jak wspomniano w podrozdziale 1.2, w praktyce nie operuje się dokładnymi długościami przedziałów czasowych, ograniczając się do liczby pełnych lat. Dlatego też najczęściej stosowane są TTŻ związane z obciętym czasem życia  $K_x$ , konstruowane przy założeniu HA. Wówczas zbiór  $\{l_t\}_{t \geq 0}$  staje się ciągiem. Niech  $\{l_k\}_{k=0}^\infty$  będzie TTŻ zmiennej  $K_0$ :

$$P(K_0 \geq k) = \frac{l_k}{l_0}, k = 0, 1, \dots \quad (1.81)$$

Wówczas  $\{l_{k+x}\}_{k=0}^\infty$  jest TTŻ zmiennej  $K_x$ , to znaczy:

$${}_k p_x = \frac{l_{x+k}}{l_x}, k = 0, 1, \dots, l_x > 0 \quad (1.82)$$

Tablica  $\{l_k\}_{k=0}^\infty$  jest TTŻ 0-latka, dodatkowo można zastąpić ciąg nieskończony ciągiem skończonym. Jeśli  $l_x = 0$  dla pewnego  $x$ , to dla wszystkich  $y \geq x$  również  $l_y = 0$ . Tym samym można założyć istnienie maksymalnego wieku  $\omega = \min\{k: l_k = 0\}$ , uzyskując tablicę  $\{l_k\}_{k=0}^{\omega-1}$  (gdzie na ogół  $\omega = 110$ ). Tablice trwania życia zbudowane dla wszystkich  $K_x$  ( $x = 0, 1, \dots, \omega - 1$ ) na podstawie TTŻ 0-latka przy założeniu HA nazywane są zagregowanymi tablicami trwania życia.

W zagregowanych TTŻ podawane są najczęściej tylko wartości  $\{l_k\}_{k=0}^{\omega-1}$  i ewentualnie inne wartości, które można wyznaczyć za pomocą  $l_k$ , to znaczy roczne prawdopodobieństwa zgonu, roczne prawdopodobieństwo przeżycia, oczekiwany przyszły czas życia oraz średnią liczbę zgonów w wieku  $k$  lat z początkowej kohorty. Tę ostatnią wielkość można wyznaczyć ze wzoru:

$$d_k = l_k - l_{k+1} \quad (1.83)$$

Dla pozostałych zmiennych prawdziwe są następujące zależności:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \quad (1.84)$$

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \quad (1.85)$$

$$e_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \dots}{l_x} = \frac{l_x + l_{x+1} + \dots}{l_x} - 1 \quad (1.86)$$

Wykorzystując zależności 1.48 i 1.84, można również oszacować roczne współczynniki zgonu:

$$\tilde{m}_x = \frac{q_x}{1 - \frac{1}{2}q_x} = \frac{\frac{d_x}{l_x}}{1 - \frac{1}{2}\frac{d_x}{l_x}} = \frac{d_x}{l_x - \frac{1}{2}d_x} \quad (1.87)$$

Ze względu na sposób ustalania wartości tablicy  $\{l_k\}_{k=0}^{\omega-1}$  wyróżnia się dwa rodzaje tablic trwania życia:

- kohortową (wzdłużną), która obrazuje rzeczywisty proces wymierania wybranej generacji,
- okresową (przekrojową), która przedstawia hipotetyczny proces wymierania populacji (tzw. kohorty hipotetycznej) na podstawie obserwacji umieralności różnych generacji w pewnym okresie.

Zatem w tablicy kohortowej ciąg  $l_0, l_1, \dots, l_{\omega-1}$  wyznaczany jest na podstawie obserwacji wzdłużnej (w czasie) liczby osób pozostających przy życiu w wieku 1, 2, ...,  $\omega - 1$  lat z początkowej liczby  $l_0$ . Natomiast, jeśli rejestry statystyczne gromadzą informacje o częstotliwości zgonów w różnym wieku (przekrojowo) obserwowane w pewnym okresie (np. roku), a następnie na ich podstawie wyznaczone są oczekiwane liczby osób dożywające wieku 1, 2, ...,  $\omega - 1$  lat z hipotetycznej (syntetycznej) kohorty, mamy do czynienia z tablicą okresową.

## 1.4. Inne współczynniki demograficzne

Do badania zmian trendów demograficznych, oprócz analizowania współczynników związanych z wymieraniem populacji, wykorzystywane są również inne wskaźniki. Ogólna zasada budowy współczynników demograficznych jest taka sama, jak

w przypadku tak zwanych mierników natężenia. To znaczy, że liczony jest stosunek liczby badanych zdarzeń demograficznych do liczby określającej wielkości badanej zbiorowości, w której zachodzą te zdarzenia, co formalnie można zapisać:

$$W = \frac{F}{L} \cdot C \quad (1.88)$$

gdzie:

$W$  – współczynnik demograficzny,

$F$  – ogólna liczba badanych zdarzeń,

$L$  – ogólna (średnia) liczba ludności badanej zbiorowości (Komisja Statystyczna ONZ zaleca, by przyjmować stan ludności w środku roku, na dzień 30 czerwca, lub średnią arytmetyczną ze stanu na początku i końcu roku),

$C$  – stała zwiększająca czytelność uzyskanego współczynnika (na ogół równa 1, 100, 1000 lub 10 000).

Współczynniki obliczone według wzoru 1.88 nazywane są współczynnikami surowymi (*crude rate*) w odróżnieniu od omówionych dalej współczynników standaryzowanych.

Badane zbiorowości bywają dodatkowo rozróżniane na zasoby (np. liczba ludności, kobiet, mężczyzn) oraz zdarzenia zachodzące w tych zbiorowościach, które nazywane są strumieniami (np. liczba urodzeń, zawartych małżeństw). Współczynniki demograficzne mogą być zatem wyznaczane jako relacje:

- zasobu do zasobu (np. udział kobiet w ogólnej liczbie ludności),
- strumienia do strumienia (np. stosunek liczby urodzeń żywych w danym okresie do liczby zgonów w tym okresie),
- strumienia do zasobu (np. liczba urodzeń żywych do liczby kobiet).

Z kolei ze względu na szczegółowość ujęcia badanego zjawiska wyróżniamy współczynniki demograficzne:

- ogólne,
- cząstkowe.

Współczynniki demograficzne ogólne są obliczane dla całej populacji, cząstkowe zaś dla grup badanej populacji (subpopulacji), wyróżnionych wg kryterium istotnego ze względu na cel badania, na przykład wieku czy płci. Współczynniki cząstkowe można wyznaczyć, korzystając z analogicznej do 1.88 zależności:

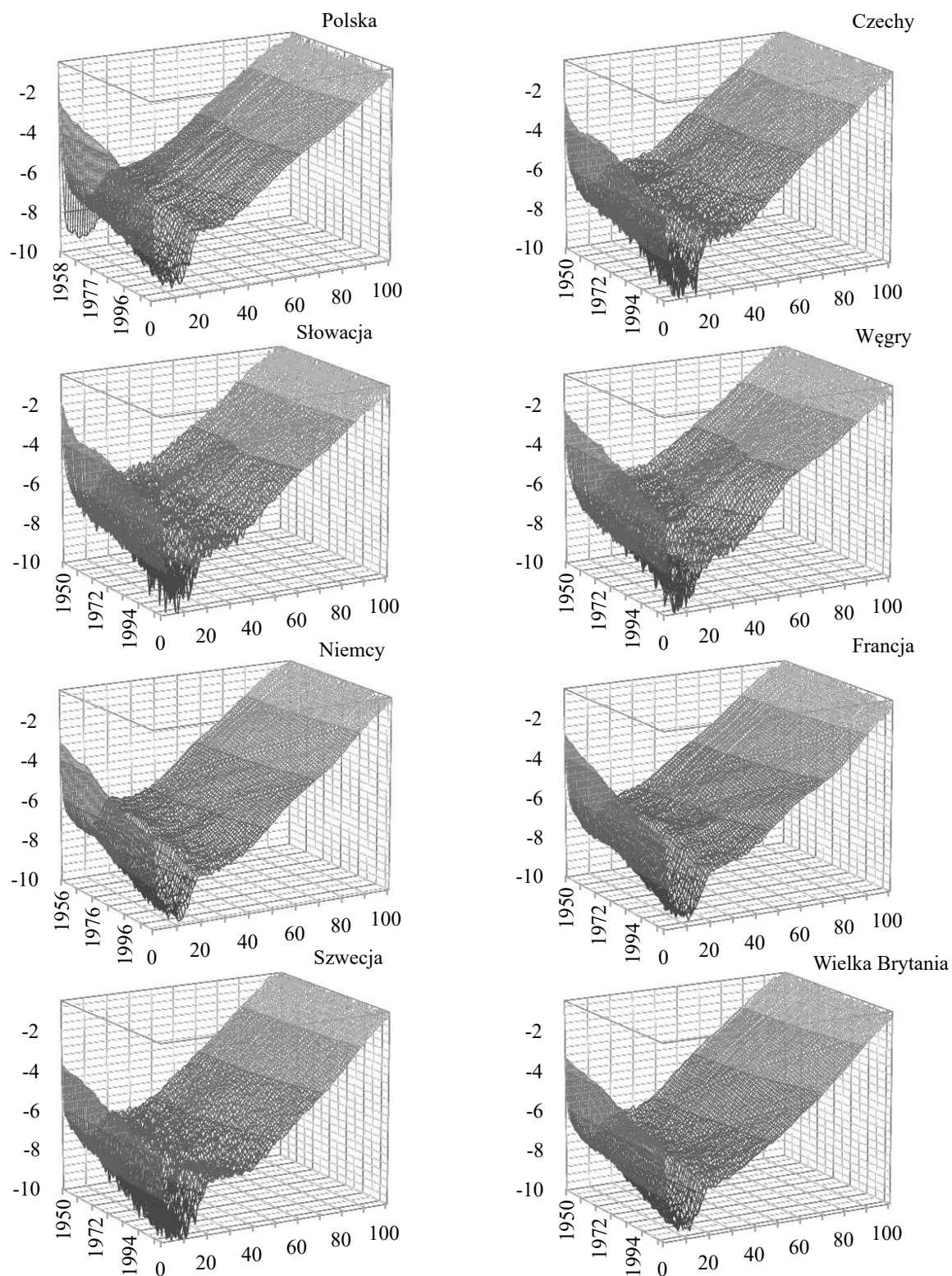
$$W(i) = \frac{F(i)}{L(i)} \cdot C \quad (1.89)$$

gdzie:

$W(i)$  – cząstkowy współczynnik demograficzny,

$F(i)$  – liczba badanych zdarzeń w subpopulacji,

$L(i)$  – liczebność subpopulacji.



**Rys. 15. Powierzchnie wymieralności w wybranych krajach dla mężczyzn**

Źródło: opracowanie własne na podstawie: Human Mortality Database, 2018.



przekrojów w danych latach powiązane są z epizodami zwiększonej śmiertelności (Pitacco i in., 2009).

Na wykresach zamieszczonych na rysunkach 14 i 15 można zauważyć, że powierzchnia dla wyższych przedziałów wiekowych, począwszy od 80 roku życia, charakteryzuje się większą gładkością. Wynika to z omówionej w podrozdziale 2.4 procedury wygładzania wykorzystywanej przy budowie bazy HMD. Analiza współczynników umieralności dla wyższych przedziałów wiekowych stanowi duże wyzwanie, niemniej kilka badań demograficznych pozwoliło na wypracowanie konsensusu odnośnie do nachylenia krzywej umieralności dla osób w zaawansowanym wieku. Udokumentowano, że natężenie wymierania osób w starszym wieku rośnie powoli, przez co krzywa umieralności jest niemal płaska. Spowolnienie tempa wzrostu umieralności można wyjaśnić przez selektywne przeżywanie osób zdrowszych (Pitacco i in., 2009). Innymi słowy, jednostki słabsze umierają wcześniej, przed osiągnięciem 80 roku życia, natomiast późny wiek osiągają osoby o stosunkowo dobrym stanie zdrowia.

Wartości rocznych współczynników zgonu wskazują, że rozkład liczby zgonów jest na ogół dwumodalny. Pierwsza moda umiejscowiona jest na lewym końcu rozkładu (dla wieku 0) i wiąże się ze śmiertelnością noworodków. Natomiast druga moda, położona bliżej prawej krawędzi rozkładu, a determinowana śmiertelnością w starszych przedziałach wiekowych, jest nazywana modalnym wiekiem w chwili zgonu lub normalnym wiekiem w chwili zgonu. Wielkość tę można interpretować jako wiek, któremu odpowiada największa liczba zgonów wśród dorosłych.

W krajach o wysokiej śmiertelności moda dla wieku 0 jest większa niż moda dla dorosłych, natomiast w krajach rozwiniętych, o niskiej śmiertelności, ta zależność jest odwrotna. Na przykład we Francji liczba zgonów dla modalnego wieku w chwili zgonu przekroczyła liczbę zgonów noworodków w 1953 roku w przypadku kobiet, a w 1960 roku w przypadku mężczyzn. Natomiast w Polsce taka zmiana miała miejsce w 1965 i 1974 roku odpowiednio dla kobiet i mężczyzn.

Modalny wiek w chwili zgonu jest użytecznym wskaźnikiem długości życia. W odróżnieniu od średniej i mediany wieku w chwili śmierci oraz oczekiwanej długości życia w momencie narodzin jest on zdeterminowany wyłącznie przez śmiertelność w wyższych przedziałach wiekowych. Ta cecha ma szczególne znaczenie, ponieważ jak wskazano w podrozdziale 2.1, wzrost długowieczności w ostatnich dekadach jest spowodowany głównie zmniejszeniem śmiertelności osób starszych. Co prawda oczekiwana długość życia dla wybranych lat (np. 60 czy 65 lat) również nie jest obciążona śmiertelnością noworodków. Nie jest jednak wolna od arbitralności w wyborze wieku, dla której ma być wyznaczona, a zmiany w warunkowej oczekiwanej długości życia są bardzo zależne od wieku, dla którego są wyznaczane. Modalny wiek w chwili zgonu nie jest obciążony tą wadą. Ponadto zmiany warun-

kowych oczekiwanych długości życia nie doszacowują przesunięć w śmiertelności osób starszych, które są dokładnie odzwierciedlone w zmianach mody (Horiuchi, Ouellette, Cheung i Robine, 2013).

Rozkład liczby zgonów, oprócz dwumodalności, charakteryzuje się lewostronną skośnością, co powoduje, że modalny wiek w chwili zgonu jest większy od oczekiwanej długości życia w momencie narodzin, natomiast mediana wieku jest zlokalizowana między nimi. W krajach o wysokiej śmiertelności noworodków oczekiwana długość życia w momencie urodzenia nie przekracza 40 lat, a modalny wiek w chwili śmierci jest wyższy nawet o 30 i więcej lat (Cheung, Robine i Caselli, 2008). W krajach rozwiniętych wartości tych trzech wskaźników mieszczą się w węższym przedziale, który wynosi około 5 lat w przypadku kobiet i 7 w przypadku mężczyzn. W tabeli 10 można prześledzić, jak kształtowały się omawiane wielkości w wybranych krajach w 2013 roku. Zauważmy, że różnice między płciami dla modalnego wieku w chwili śmierci są mniejsze niż w przypadku oczekiwanej długości życia w momencie narodzin. Dzieje się tak dlatego, że oczekiwana długość życia w momencie narodzin uwzględnia śmiertelność we wszystkich grupach wiekowych, a zatem śmiertelność noworodków, która jest większa wśród chłopców niż dziewcząt.

**Tabela 10. Modalny wiek i mediana wieku w chwili śmierci oraz oczekiwany czas życia noworodka w 2013 roku**

Wskaźnik	Polska		Czechy		Słowacja		Węgry	
	kobiety	mężczyźni	kobiety	mężczyźni	kobiety	mężczyźni	kobiety	mężczyźni
$M$	87	82	86	85	84	81	86	78
$M_e$	84	75,7	83,8	77,7	82,9	75,4	82,1	74,4
$e_0$	80,9	73,0	81,2	75,2	80,0	72,9	79,0	72,1
	Niemcy		Francja		Szwecja		Wielka Brytania	
	kobiety	mężczyźni	kobiety	mężczyźni	kobiety	mężczyźni	kobiety	mężczyźni
$M$	88	85	91	88	89	84	87	86
$M_e$	85,8	81,3	88,3	82,5	86,4	83,1	85,6	82,2
$e_0$	82,87	78,22	85,03	78,76	83,71	80,1	82,78	79,01

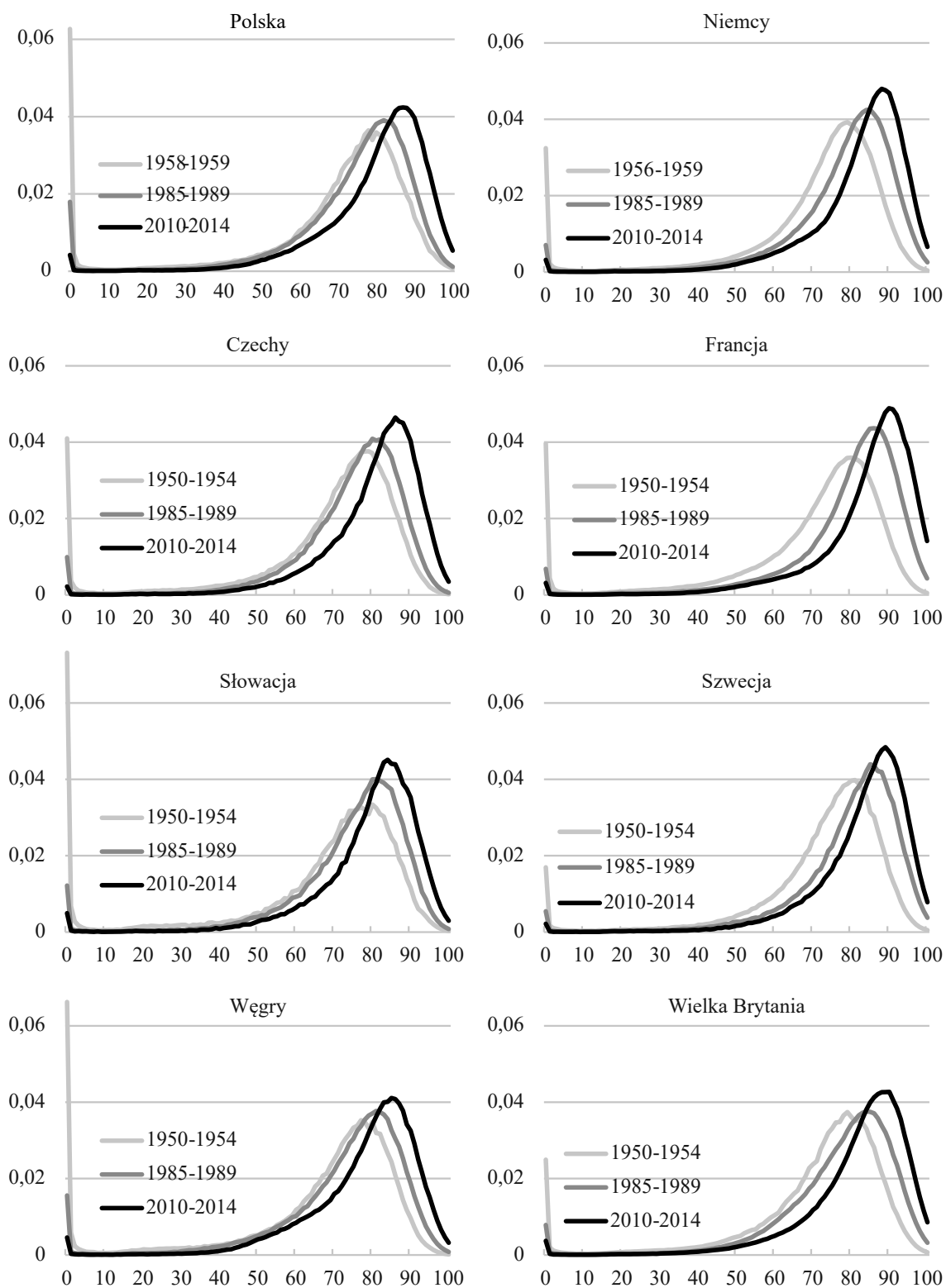
Oznaczenia:

$M$  – modalny wiek w chwili śmierci.

$M_e$  – mediana wieku w chwili śmierci.

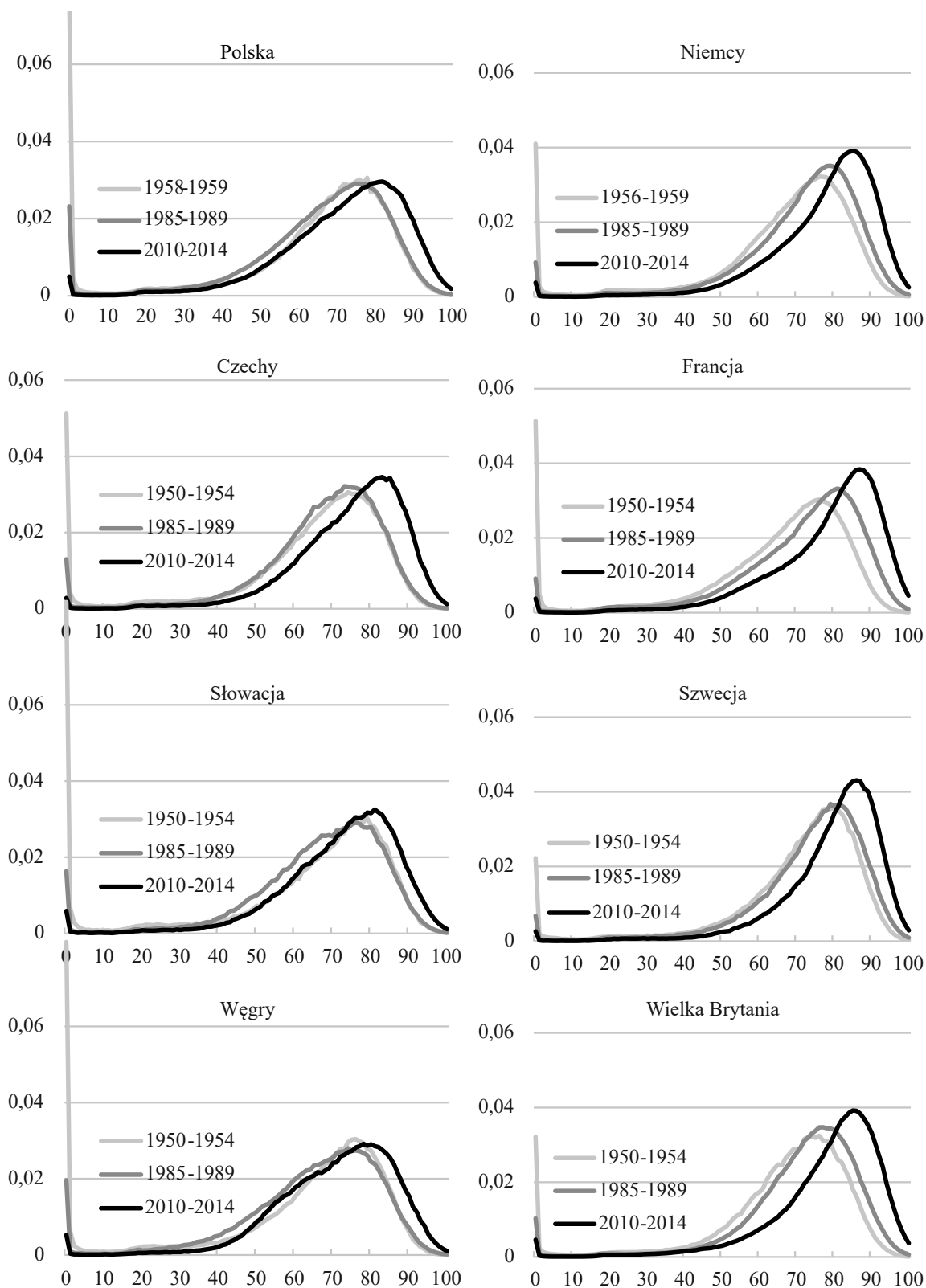
$e_0$  – oczekiwany czas życia noworodka.

Źródło: opracowanie własne na podstawie: Human Mortality Database, 2018.



**Rys. 16. Rozkład zgonów kobiet po 1950 roku**

Źródło: opracowanie własne na podstawie: Human Mortality Database, 2018.



**Rys. 17. Rozkład zgonów mężczyzn po 1950 roku**

Źródło: opracowanie własne na podstawie: Human Mortality Database, 2018.

## Rozdział 3

# MODELOWANIE ŚMIERTELNOŚCI – UJĘCIE HISTORYCZNE

Pytanie, jak długo będzie trwać życie, z pewnością towarzyszy człowiekowi od zarania dziejów. Przez długi czas był to problem o charakterze filozoficznym, ale nabrał wymiaru praktycznego w momencie pojawienia się renty dożywotniej. Konieczność wypłacania danej osobie określonej sumy pieniężnej aż do śmierci nasuwa pytanie, jak długo takie płatności będą trwały, jaka będzie zatem ich łączna wartość.

### 3.1. Starożytność

Renty mają starożytny rodowód, z pewnością znane były już Rzymianom (Mackenzie, 2006). Ponieważ w ówczesnym czasie renty mogły być zapisywane w spadku, konieczne było ustalanie ich wartości, by wyliczyć wysokość podatku spadkowego oraz sprawdzić, czy wypełniono powinności wobec spadkobierców<sup>24</sup>. Obowiązujące w Cesarstwie Rzymskim na początku III wieku n.e. prawo zaskakująco, z obecnej perspektywy, regulowało sposób ustalania wartości renty dożywotniej. Otóż jeśli otrzymujący rentę był w wieku lat 30 lub młodszy, to roczną płatność przemnażano przez 30. Natomiast w przypadku gdy otrzymujący rentę był w wieku 31–60 lat, roczną płatność przemnażano przez różnicę między 60 a wiekiem uposażonego. Powyżej 60 roku życia wartość renty wynosiła 0. Zatem Rzymianie dostrzegali konieczność zmniejszania wartości renty dożywotniej wraz ze wzrostem wieku uposażonego. Ich intuicja – usystematyzowane badanie tego zjawiska pojawiło się bowiem nieco później – była prawidłowa. Współcześnie wiadomo, że wartość renty dożywotniej w największym stopniu jest zdeterminowana dalszym oczekiwanym trwaniem życia pobierającego rentę. Oczekiwane dalsze trwanie ży-

<sup>24</sup> Ustawa Falcydyjska, *lex Falcidia* (40 r. p.n.e.) zapewniała spadkobiercom wysokość spadku w wysokości co najmniej  $\frac{1}{4}$  jego wartości (tzw. kwarta Falcydyjska).

cia zmniejsza się wraz z wiekiem, zatem im starszy jest uposażony, tym mniejszą liczbę płatności otrzyma. Niemniej opisywana wyżej reguła prawa rzymskiego powoduje bardzo szybki spadek wartości renty dożywotniej. Na przykład wartość renty dla ustalonej rocznej płatności jest dla 52-latka dwukrotnie większa niż dla 56-latka. Jak zauważa Mackenzie (2006), nawet w Rzymie w III wieku n.e. oczekiwane dalsze trwanie życia osoby w wieku 52 i 56 lat prawdopodobnie nie różniło się tak bardzo. Co więcej, dla 60-latka oczekiwane dalsze trwanie życia raczej nie było równe 0. Zapewne te paradoksy doprowadziły do zaproponowania przez prawnika Ulpiana<sup>25</sup> zmodyfikowanej wersji reguły wyznaczającej wartość renty dożywotniej, która lepiej oddawała wpływ wieku uposażonego na tę wartość. W tabeli 11 zestawiono mnożniki używane do wyznaczania wartości rent dożywotnich w regule Ulpiana i obowiązującej wcześniej metodzie, określonej mianem reguły zwyczajowej. Ulpian niekiedy uznawany jest za pierwszego twórcę tablic trwania życia. Jednak stwierdzenie to jest zbyt daleko idące. Podane przez niego współczynniki są powiązane z oczekiwaną długością trwania życia otrzymującego rentę, można na ich podstawie nawet oszacować dalsze trwanie życia, ale z pewnością zawarte w tabeli 11 dane nie są tablicą trwania życia we współczesnym rozumieniu.

**Tabela 11. Tablice przeliczeniowe dla rent dożywotnich: zwyczajowa i Ulpiana**

Wiek uposażonego	Reguła Ulpiana	Reguła zwyczajowa
0–19	30	30
20–24	28	
25–29	25	
30–34	22	
35–39	20	60–x
40–49	60–x–1	
50–54	9	
55–59	7	
60–	5	0

Źródło: Frier, 1982.

### 3.2. Czasy nowożytne – początki demografii i matematyki aktuarialnej

Upadek Cesarstwa Rzymskiego spowodował regres stosunków społecznych, podobnie jednak jak wiele innych instytucji prawa rzymskiego, również renty dożywotnie były wykorzystywane w średniowiecznej Europie. Nie używano wówczas

<sup>25</sup> Domicjusz Ulpian (?–223) rzymski prawnik i pisarz.

nazwy renta czy annuita. Funkcjonowało określenie *census*, którym określano każdą umowę dotyczącą strumienia płatności lub świadczeń w naturze. Mimo dowodów, że tabele Ulpiana nie zostały zapomniane, wartość rent dożywotnich była ustalana bez odniesienia do wieku. Na początku XV wieku renty dożywotnie oferował Kościół, arystokracja, a także miasta we Włoszech, Niemczech czy Niderlandach<sup>26</sup>. Sprzedaż rent wykorzystywana była do pozyskiwania kapitału; był to substytut obligacji, których jeszcze nie znano. Wartość rent zmieniała się w czasie i przestrzeni, i była uzależniona od stopy procentowej. Trudno odmówić racjonalności nabywcom takich rent, którzy ze względu na brak wpływu wieku na cenę renty, często wybierali zdrowe dzieci jako uposażonych (Poitras, 2000).

Do uwzględniania wieku przy wyznaczaniu wartości rent dożywotnich powrócono dopiero w 2. połowie XVII wieku. Zanim do tego doszło, miały miejsce bardzo istotne dla rozwoju demografii wydarzenia i odkrycia, niezwiązane bezpośrednio z rentami. Otóż kupiec bławatny John Graunt zainteresował się londyńskimi wykazami zgonów (*Bills of mortality*). Sporządzanie wykazów zapoczątkowano w 1592 roku, po jednej z zaraz, a od roku 1603 regularnie zbierano potrzebne dane z terenu każdej londyńskiej parafii, a także z parafii sąsiadujących z Londynem. Wykaz zgonów był jednym z elementów wczesnego ostrzegania przed regularnie wybuchającymi epidemiami dżumy, które nękały Europę od XIV w. Wykazy zgonów wydawano co tydzień; dokument ten zawierał listę osób, które zmarły w tygodniu poprzedzającym publikację, wraz z przyczyną zgonu. Ponadto do listy zgonów dołączany był wykaz nowo ochrzczonych dzieci. Graunt, który urodził się i żył w Londynie, miał świadomość tworzenia takich wykazów, ale początkowo poświęcał im niewiele uwagi. Później, jak sam określił, doznał objawienia i postanowił zestawić informacje zawarte wykazach zgonów za pomocą tabel (Weisberg, 2014). Przedstawienie tego typu danych w postaci tabelarycznej z pewnością było pomysłem bardzo innowacyjnym. Podkreślić też należy, że Graunt nie miał żadnego przygotowania matematycznego, poza umiejętnościami rachunkowymi niezbędnymi do prowadzenia działalności kupieckiej. W roku 1662 Graunt opublikował pracę *Naturalne i polityczne obserwacje dokonane na wykazach zgonów* (*Natural and Political Observations Made Upon the Bills of Mortality*), która niemal natychmiast została zauważona i doceniona. Prezentacja dzieła w Towarzystwie Królewskim (Royal Society) zapewniła Grauntowi członkostwo tej szacownej instytucji (Hald, 2003).

Jednym z najszerzej komentowanych efektów pracy Graunta była tablica przedstawiająca wymieranie w 100-osobowej grupie (tab. 12). Należy przy tym zaznaczyć, że tablica ta jest przez wielu błędnie uważana za opartą na rzeczywistych danych o śmiertelności. Trzeba jednak pamiętać, że informacje, którymi dyspo-

<sup>26</sup> Na przykład Wenecja już w XIII w., a Amsterdam od roku 1402 oferowały renty dożywotnie, których cena nie zależała od wieku.

nował Graunt, były bardzo ograniczone – zestawienia zgonów nie zawierały informacji o wieku zmarłego (Weisberg, 2014), skupiały się przede wszystkim na przyczynach zgonów, obejmując ich aż 81 (Hald, 2003).

Wynikająca z tabeli 12 implikowana śmiertelność przedstawia dość ponury obraz życia w XVII-wiecznym Londynie. Nie jest możliwe zweryfikowanie, na ile tablice Graunta są wiarygodne, niemniej nie wzbudzały zdziwienia u jego współczesnych (Weisberg, 2014).

John Graunt zmarł w 1674 roku, ale pozostawił po sobie znaczącą spuściznę, a jego praca stała się zaczynem dla trzech różnych rodzajów badań (Hald, 2003):

- arytmetyki politycznej,
- badania trwałości wskaźników statystycznych,
- obliczania oczekiwanej długości życia oraz prawdopodobieństw przeżywalności.

**Tabela 12. Tablica śmiertelności Johna Graunta**

Wiek	Liczba przeżywających
0	100
6	64
16	40
26	25
36	16
46	10
56	6
66	3
76	1

Źródło: Graunt, J. (1662). *Natural and Political Observations made upon the Bills of Mortality*. Martyn, London za: Willigan, Lynch, Tilly i Shorter, 1982.

Bezpośrednim kontynuatorem badań Graunta był jego przyjaciel, William Petty. Postanowił on wykorzystać metodę Graunta do analizy danych ekonomicznych oraz danych o znaczeniu politycznym. To właśnie Petty jest autorem terminu „arytmetyka polityczna”, którego użył jako tytułu swojego dzieła – napisanej w 1676 roku, a wydanej po raz pierwszy w 1690 *Arytmetyki politycznej (Political Arithmetick)*. We wstępie do tej pracy znaleźć można fragment będący jego manifestem:

Metoda jaką stosuję nie jest jeszcze często w użyciu. Zamiast używać tylko słów porównujących i opisujących oraz argumentów intelektualnych, przyjmuję kierunek (jako okaz arytmetyka politycznego było to moim celem od dawna) na



wyrażanie się za pomocą liczb, wag i miar, korzystając tylko z argumentów rozumu lub rozważając tylko te przyczyny, które mają swe podstawy w przyrodzie; pozostawiając to co zależy od niestałych myśli, opinii, pragnień i namiętności poszczególnych ludzi rozważaniom innych (Roncaglia, 2005).

Prace Graunta i Petty’ego zapoczątkowały systematyczne zbieranie danych demograficznych i przyczyniły się do utworzenia urzędów statystycznych.

**Tabela 13. Obliczenia oczekiwanej długości życia wykonane przez Lodewijka Huygensa**

Wiek $x$	Liczba przeżywających $l_x$	Liczba zgonów $d_x$	Środek przedziału wieku $t_x$	$t_x d_x$	Zakumulowana wartość $t_x d_x$ (od dołu)	Średni wiek w chwili śmierci $\bar{t}_x$	Oczekiwana długość życia $e_x$
0	100	36	3	108	1822	18,22	18,22
6	64	24	11	264	1714	26,78	20,78
16	40	15	21	315	1450	36,25	20,25
26	25	9	31	279	1135	45,40	19,40
36	16	6	41	246	856	53,50	17,50
46	10	4	51	204	610	61,00	15,00
56	6	3	61	183	406	67,67	11,67
66	3	2	71	142	223	74,33	8,33
76	1	1	81	81	81	81,00	5,00
86	0						0

Źródło: Hald, 2003.

Kopia dzieła Graunta jeszcze w 1662 roku trafiła do rąk Christiaana Huygensa, autora cieszącego się powszechnym uznaniem traktatu dotyczącego teorii gier losowych *O rachubach w grze w kości* (*De Ratiociniis in Ludo Aleae*)<sup>27</sup>. W traktacie tym zamieszczona została między innymi definicja wartości oczekiwanej. Huygens, mimo że uprzejmie wyraził swój zachwyt dla pracy Graunta, to nie poświęcił jej większego zainteresowania. Powrócił do niej dopiero w 1669 roku, gdy jego młodszy brat Lodewijk napisał do niego list w sprawie oczekiwanej długości życia i przydatności tablic Graunta do wyznaczania wartości rent dożywotnich.

<sup>27</sup> Zainteresowania Christiaana Huygensa wykraczały poza teorie gier losowych. Zajmował się, z dużym powodzeniem, również astronomią, optyką i zegarmistrzostwem. Traktat *O rachubach w grze w kości* został opublikowany w 1657 roku i był pierwszą pracą z dziedziny teorii prawdopodobieństwa (Hald, 2003).

Ostatecznie problemem wyceny rent zajęli się inni (co omówiono poniżej), ale bracia Huygens wymienili bardzo interesującą korespondencję dotyczącą mediany i oczekiwanej długości życia. Obliczenia Lodewijka, potwierdzone przez Christiana, zamieszczone zostały w tabeli 13. Lodewijk Huygens nie używał w tabeli symboli matematycznych, podał wyłącznie wyniki i ich wyjaśnienie. Ponadto początkowo nie używał sformułowania „oczekiwana”. Dopiero Christiaan zaproponował, by do określenia pozostałej długości życia użyć zdefiniowanej w swoim traktacie wartości oczekiwanej. W rachunkach przyjął dla każdego przedziału wieku jednostajny rozkład liczby zgonów, zatem  $t_x$  oznacza środek przedziału wieku, dla którego określona jest liczba zgonów  $d_x$ . Obliczenie przeciętnego wieku w chwili śmierci  $\bar{t}_x$  oraz oczekiwanej długości życia  $\bar{e}_x$  przeprowadzone zostało następująco:

$$\bar{t}_x = \frac{\sum_{i=x}^{76} t_i \cdot d_i}{\sum_{i=x}^{76} d_i} = \frac{\sum_{i=x}^{76} t_i \cdot d_i}{l_x}, \quad \bar{e}_x = \bar{t}_x - x \quad (3.1)$$

gdzie  $i$  oraz  $x = 0, 6, 16, \dots, 76$ .

Niestety, znaczenie spostrzeżeń poczynionych przez braci Huygens jest marginalne, ponieważ ich listy opublikowane zostały dopiero w roku 1895 (Hald, 2003). Niemniej przywołana korespondencja wskazuje, że problem z uwzględnianiem długości życia w wycenie rent dożywotnich zajmował największe umysły ówczesnych lat.

Tablice Graunta dotarły również do Jacoba Bernoulliego, dla którego stały się one inspiracją do rozmyślań o oczekiwanej długości życia. Bernoulli zajął się jednym z najistotniejszych w ówczesnym czasie problemów, to znaczy wpływem długości życia na dziedziczenie. Rozważał mianowicie hipotetyczny kontrakt małżeński i możliwe warianty dziedziczenia dla męża. Warianty te są determinowane przez kolejność zgonów ojców małżonków i żony. Może się zdarzyć, że jeden lub obaj ojcowie pary umrą przed żoną lub odwrotnie, zatem wartość oczekiwana spadku dla męża zależy od prawdopodobieństwa, że żona przeżyje obu ojców. Bernoulli podkreślał, że przeprowadzenie takich obliczeń może wydawać się niemożliwe, ale wykazy zgonów z Londynu pozwalają na uzyskanie rozwiązania. W artykule opublikowanym w *Journal de Sçavants*<sup>28</sup> w roku 1686 podał rozwiązanie prostszego problemu. Mianowicie stwierdził (bez dowodu), że szansa na przeżycie przez 16-latkę osoby 56-letniej wynosi 59 do 101 (Weisberg, 2014).

Z kolei Nicholas Bernoulli, bratanek Jacoba, opublikował w 1709 roku pracę *Wykorzystanie sztuki przewidywania w naukach prawnych* (*De Usu Artis Conjectandi*

<sup>28</sup> *Journal de Sçavants* to pierwsze czasopismo naukowe wydawane od roku 1665 do dziś. Obecnie jest to pismo humanistyczne.

*in Jure*), w której zajął się między innymi problemem oczekiwanej długości życia i mediany życia, uzyskując – niezależnie – podobne wyniki jak bracia Huygens. Warto zwrócić uwagę na jeszcze jedno zagadnienie, któremu uwagę poświęcił Nicholas Bernoulli we wspomnianej pracy. Mianowicie rozważał on, po jakim czasie osobę zaginioną można uznać za zmarłą. Oczywiście jest to problem o charakterze prawnym, o dużym znaczeniu praktycznym, zwłaszcza w niespokojnych czasach<sup>29</sup>. Bernoulli zaproponował, by rozwiązać tę kwestię na gruncie teorii prawdopodobieństwa, korzystając z tablic Graunta. Wyjaśnił, że możliwe jest ustalenie czasu, po jakim śmierć osoby zaginionej jest 2-krotnie, 3-krotnie, 4-krotnie itd. bardziej prawdopodobna niż pozostawanie przy życiu (Hald, 2003). Podał rozwiązanie dla przypadku, gdy śmierć osoby zaginionej jest dwukrotnie bardziej prawdopodobna (HCFMab. 14). Uzyskany wynik opatrzył komentarzem, że w przypadku zaginięcia 20- lub 30-latka brak wieści przez 25 lat powinien skutkować uznaniem takiej osoby przez sąd za zmarłą.

**Tabela 14. Obliczenia Nicholas Bernoulliego dotyczące czasu, po którym śmierć osoby zaginionej jest dwukrotnie bardziej prawdopodobna niż pozostawanie przy życiu**

Wiek $x$	0	6	16	26	36	46	56	66	76
Czas $t$	$20\frac{2}{3}$	$24\frac{4}{9}$	25	25	$23\frac{1}{3}$	20	15	10	$6\frac{2}{3}$

Źródło: Hald, 2003.

W kontekście początków modelowania śmiertelności należy wspomnieć o jeszcze jednym sposobie pozyskiwania przez państwa środków finansowych, wymyślonym w połowie XVII w. Twórcą schematu był Lorenzo Tonti, włoski bankier, który większość swojego życia spędził we Francji. Tonti zaproponował ówczesnemu pierwszemu ministrowi Francji, kardynałowi Mazariniemu, by pozyskiwać środki przez sprzedaż udziałów w funduszu – o ustalonej z góry wartości – grupie osób w podobnym wieku. Nabywcy udziałów mieli otrzymywać tak długo, jak tylko pozostawali przy życiu, procent od funduszu, przy czym udział w funduszu, od którego procent miał być naliczany, zwiększał się wraz z wymieraniem udziałowców. Tym samym państwo zyskiwało natychmiastowy dostęp do środków pieniężnych w zamian za gwarancję wypłaty stałej renty rocznej, dzielonej po równo na pozostałych przy życiu udziałowców. Fundusz ulegał rozwiązaniu wraz ze śmiercią ostatniego udziałowca. Opisany schemat nazwany został od nazwiska twórcy tontyną (*tontine*) (McKeever, 2009). Używając współczesnej no-

<sup>29</sup> W Polsce na przykład za zmarłą może być uznana osoba zaginiona, jeżeli upłynęło dziesięć lat od końca roku kalendarzowego, w którym według istniejących wiadomości jeszcze żyła.