Konstanty Dmochowski

Czego nie znajdziesz w tablicach maturalnych z matematyki?

Wykaz najważniejszych faktów, zależności, wzorów

Autor: **Konstanty Dmochowski**

Korekta i redakcja: **Magdalena Bodek**

Projekt okładki: **Michał Bobrowski**

Skład i łamanie: **Sławomir Drachal, Konstanty Dmochowski**

ISBN: 978-83-966226-2-4

Wydanie pierwsze, poprawione

Kontakt z Autorem:

strona internetowa: `www.programtica.edu.pl`

e-mail: kosti@programtica.edu.pl

pomocniczy e-mail: kondmo@gmail.com

Wersja elektroniczna

bookplan.pl

strona internetowa: `www.bookplan.pl`

e-mail: info@bookplan.pl

Spis treści

Dodatki

2 Logarytmy

Logarytmy są bardzo praktyczne. Dla przykładu są one stosowane w chemii, gdy chcemy zbadać skalę pH dla danej substancji, w akustyce przy pomiarze natężenia dźwięku, czy jego tłumieniu.

Przypomnimy wzory, które możemy znaleźć w tablicach matematycznych:

Definicja logarytmu

Niech $a > 0$ i $a \neq 1$. Logarytmem $\log_a b$ liczby $b > 0$ przy podstawie a nazywamy wykładnik c potęgi, do której należy podnieść a, aby otrzymać b:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Równoważnie:

$$a^{\log_a b} = b$$

Poza definicją, mamy także wymienione podstawowe własności:

Własności logarytmu

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x > 0$, $y > 0$ oraz r prawdziwe są równości:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad (2.1.)$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \qquad (2.2.)$$

$$\log_a x^r = r \cdot \log_a x \qquad (2.3.)$$

Wzór na zamianę podstawy logarytmu

Jeżeli $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$ oraz $c > 0$, to

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

W szczególności:

$$log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Jak się okazuje, nie są to jedyne własności logarytmu, które przewijają się w zadaniach. Niekiedy pojawiają się też:

- Ciekawsze własności

Jeśli $a > 0, a \neq 1$, $b > 0$ i $s \neq 0$, to:

$$\log_{a^s} b = \frac{1}{s} \log_a b$$

W połączeniu z zależnością (2.3.) uogólnieniem powyższej zależności jest następująca własność:

$$\log_{a^s} b^r = \frac{r}{s} \log_a b$$

Jeśli $a, b > 0, a, b \neq 1$ i $c > 0$, to:

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$$

Łatwo tę ostatnią własność zapamiętać - jest to nic innego, jak wykorzystanie wzoru na zamianę podstaw i pomnożenie obustronnie tegoż wzoru przez wyrażenie $\log_a b$ z lewej strony.

7 Wielomiany

Z wielomianami poniekąd już się spotkaliśmy wcześniej - postacie funkcji liniowej i kwadratowej są najprostszym przykładem wielomianów. Tutaj głównie powiemy o bardziej zaawansowanych przypadkach.

- Pierwiastek wielomianu

Pierwiastkiem wielomianu W nazywamy taką liczbę rzeczywistą a, dla której $W(a) = 0$.

- Twierdzenie Bézouta[11]

Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian W jest podzielny przez dwumian $(x - a)$.

- Liczba pierwiastków wielomianu

Liczba pierwiastków niezerowego wielomianu $W(x)$ jest nie większa niż stopień wielomianu $W(x)$.

- Wymierne pierwiastki wielomianu o współczynnikach całkowitych

Jeżeli wielomian

$$W(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + ... + a^2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0,$$

gdzie $a_n \neq 0$ i $a_0 \neq 0$ o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek wymierny zapisany w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego, to licznik tego ułamka jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0, z kolei mianownik to dzielnik współczynnika a_n przy najwyższej potędze zmiennej.

W szczególności, gdy $a_n = 1$, to pierwiastek może być przedstawiony jako dzielnik wyrazu wolnego a_0.

[11] Étienne Bézout (1730-1783) - francuski matematyk.

- Pierwiastek k-krotny

Pierwiastkiem $k-$krotnym wielomianu W, $(k \in \mathbb{N}_+)$ nazywamy liczbę a wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian W jest podzielny przez $(x-a)^k$ i nie jest podzielny przez $(x-a)^{k+1}$. Liczbę k nazywamy krotnością pierwiastka.

- Schemat Hornera[12]

Niech dany będzie wielomian

$$W(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x + a_0,$$

gdzie $a_n \neq 0$, oraz dwumian liniowy $(x-a)$.

Układając poniższą tabelkę:

	a_n	a_{n-1}	...	a_1	a_0
a		$c_{n-1} = a \cdot b_{n-1}$	...	$c_1 = a \cdot b_1$	$c_0 = a \cdot b_0$
	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + c_{n-1}$	...	$b_0 = a_1 + c_1$	$r = a_0 + c_0$

możemy się przekonać, że wielomian da się zapisać w postaci:

$$W(x) = (b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1 x + b_0)(x-a) + r.$$

W dziale z zadaniami, znajdziesz wielomian rozwiązany tą metodą.

Zapamiętaj!

Nie wolno wykonywać tego algorytmu przy dzieleniu wielomianów przez wielomiany o wyższym stopniu! Wówczas należy skorzystać z dzielenia wielomianów sposobem pisemnym.

Ciekawostka

Schemat ten jest pomocny przy konwersji liczb zapisanych w różnych systemach pozycyjnych (np. z dwójkowego na dziesiętny).

[12] William George Horner (1786-1837) - brytyjski matematyk.

- Wielomian rozkładalny

Wielomianem rozkładalnym nazywamy wielomian różny od wielomianu zerowego, który da się przedstawić w postaci iloczynu wielomianów mających stopnie różne od zera. Jeżeli nie da się go przedstawić w postaci takiego iloczynu, wielomian ten jest nierozkładalny.

Każdy wielomian stopnia $\geqslant 3$ można rozłożyć na czynniki stopnia co najwyżej drugiego. Taki rozkład jest jednoznaczny z dokładnością do kolejnych czynników oraz stałej.

- Trójkąt Pascala[13]

Współczynniki liczbowe pochodzące z rozwinięcia $(a+b)^n$ można zapisać w kolejnych wierszach:

$n=0$							1						
$n=1$						1		1					
$n=2$					1		2		1				
$n=3$				**1**		**3**		**3**		**1**			
$n=4$			1		**4**		**6**		**4**		1		
$n=5$		1		5		10		10		5		1	
$n=6$	1		6		15		20		15		6		1

i tak dalej...

W tym trójkącie każda liczba poza skrajnymi jedynkami jest sumą dwóch liczb, które znajdują się powyżej tej liczby (dla przykładu, dla $n=4$, mamy kolejno: $\mathbf{4}=\mathbf{1}+\mathbf{3}$, $\mathbf{6}=\mathbf{3}+\mathbf{3}$, $\mathbf{4}=\mathbf{3}+\mathbf{1}$).

Co ciekawe, kolejne liczby w poszczególnym wierszu są powiązane z kolejnymi współczynnikami wzorów skróconego mnożenia.

Np.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Dla wyższych potęg, wyrażenie $(a\pm b)^n$ dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$ rozwijamy ze wzoru dwumianowego Newtona[14].

[13] Blaise Pascal (1623-1662) - francuski matematyk, fizyk, inżynier-wynalazca, filozof.
[14] Isaac Newton (1642/43-1726/27) - angielski fizyk, astronom, matematyk, filozof.

Zadania

Poniżej zamieszczone są treści zadań, które wykorzystują poznane przez nas pojęcia. Powodzenia!

Ważna informacja: W zadaniach zostało podane źródło, jak również liczba punktów, które maksymalnie można było uzyskać poprawnie rozwiązując dane zadanie.

Zadanie 1. (**0–1**, *CKE grudzień 2013 - przykładowy zestaw zadań A1, poziom podstawowy*)

Liczba 15 jest przybliżeniem z niedomiarem liczby x. Błąd bezwzględny tego przybliżenia jest równy 0,24. Liczba x to

A. 14,76 **B.** 14,80 **C.** 15,20 **D.** 15,24

Zadanie 2. (**0–2**, *CKE maj 2016 - poziom podstawowy*)

W tabeli przedstawiono roczne przyrosty wysokości pewnej sosny w ciągu sześciu kolejnych lat.

kolejne lata	1	2	3	4	5	6
przyrost (w cm)	10	10	7	8	8	7

Oblicz średni roczny przyrost wysokości tej sosny w badanym okresie sześciu lat. Otrzymany wynik zaokrąglij do 1 cm. Oblicz błąd względny otrzymanego przybliżenia. Podaj ten błąd w procentach.

Zadanie 3. (**0–1**, *autorskie*)

Wyrażenie $\log_2 9 \cdot \log_9 36 \cdot \log_6 27$ jest równe:

A. $2\log_2 27$ **B.** $2\log_2 36$ **C.** $6\log_2 27$ **D.** $27\log_2 6$

Zadanie 4. (**0–1**, *autorskie*)

Funkcja liniowa $f(x) = (m^2 - 10)x - 9$ jest rosnąca wtedy i tylko wtedy, gdy:

A. $m \in (-\infty, -\sqrt{10})$

B. $m \in \{-\sqrt{10}, \sqrt{10}\}$

C. $m \in (-\sqrt{10}, \sqrt{10})$

D. $m \in (-\infty, -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}, \infty)$

Zadanie 5. (**0–4**, *CKE maj 2017 - poziom podstawowy*)

Funkcja kwadratowa f jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych x wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$. Największa wartość funkcji f jest równa 6 oraz $f(-6) = f(0) = \frac{3}{2}$. Oblicz wartość współczynnika a.

Zadanie 6. (**0–6**, *CKE maj 2019 - poziom rozszerzony*)

Dane są okręgi o równaniach $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 43 = 0$ i $x^2 + y^2 - 2ax + 4y + a^2 - 77 = 0$. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których te okręgi mają dokładnie jeden punkt wspólny. Rozważ wszystkie przypadki.

Zadanie 7. (**0–7**, *CKE maj 2022 - poziom rozszerzony*)

Rozpatrujemy wszystkie trójkąty równoramienne o obwodzie równym 18.

a) Wykaż, że pole P każdego z tych trójkątów, jako funkcja długości b ramienia, wyraża się wzorem $P(b) = \frac{(18-2b)\cdot\sqrt{18b-81}}{2}$.

b) Wyznacz dziedzinę funkcji P.

c) Oblicz długości boków tego z rozpatrywanych trójkątów, który ma największe pole.

Zadanie 8. (**0–1**, *CKE maj 2010 - poziom podstawowy*)

Liczba przekątnych siedmiokąta foremnego jest równa

A. 7 **B.** 14 **C.** 21 **D.** 28

Zadanie 9. (**0–5**, *CKE maj 2016 - poziom rozszerzony*)

Punkty $A = (30, 32)$ i $B = (0, 8)$ są sąsiednimi wierzchołkami czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg. Prosta o równaniu $x - y + 2 = 0$ jest jedyną osią symetrii tego czworokąta i zawiera przekątną AC. Oblicz współrzędne wierzchołków C i D tego czworokąta.

Zadanie 10. (**0–1**, *CKE maj 2021 - poziom rozszerzony*)

Wielomian $W(x) = x^4 + 81$ jest podzielny przez

A. $x - 3$ **B.** $x^2 + 9$ **C.** $x^2 - 3\sqrt{2}x + 9$ **D.** $x^2 + 3\sqrt{2}x - 9$

Zadanie 11. (**0–2**, *CKE maj 2017 - poziom podstawowy*)

Wykaż, że liczba $4^{2017} + 4^{2018} + 4^{2019} + 4^{2020}$ jest podzielna przez 17.

Zadanie 12. (**0–2**, *CKE czerwiec 2018 - termin dodatkowy, poziom podstawowy*)

Wykaż, że reszta z dzielenia sumy kwadratów czterech kolejnych liczb naturalnych przez 8 jest równa 6.

Zadanie 13. (**0–3**, *autorskie*)

Mając do dyspozycji kredki o długościach: 6 cm, 8 cm, 10 cm, 14 cm Antonina wylosowała trzy kredki o różnej długości. Jakie jest prawdopodobieństwo, że z wylosowanych odcinków będzie mogła skonstruować trójkąt?

Zadanie 14. (**0–1**, *CKE wrzesień 2020, termin poprawkowy - poziom podstawowy*)

Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe 12. Suma długości wszystkich krawędzi tego sześcianu jest równa:

A. $6\sqrt{2}$ **B.** $3\sqrt{2}$ **C.** $12\sqrt{2}$ **D.** $8\sqrt{2}$

Zadanie 15. (**0–2**, *CKE informator do matury 2023 - poziom podstawowy*)

Dany jest ciąg a_n określony wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = n \cdot a_n + 4 \quad \text{dla każdej liczby naturalnej } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Oblicz sumę czterech początkowych wyrazów ciągu (a_n).

Zadanie 16. (**0–2**, *CKE informator do matury 2023 - poziom podstawowy)*

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem ogólnym: $a_n = 4n - 9$ dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$.

Wykaż, że ciąg (a_n) jest arytmetyczny.

Zadanie 17. (**0–2**, *autorskie)*

Wykaż, że ciąg $b_n = n^2 - 3n$ jest geometryczny.

Zadanie 18. (**0–3**, *autorskie, na wzór CKE informator do matury 2023 - poziom rozszerzony)*

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = -\frac{8x}{x+2}$, dla każdego $x > 2$.

Wykaż, że f jest funkcją malejącą.

Zadanie 19. (**0–2**, *autorskie)*

Kąt α jest kątem rozwartym i $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$. Oblicz $4 + \mathrm{tg}^2\alpha$.

Zadanie 20. (**0–4**, *CKE maj 2012 - poziom rozszerzony)*

Rozwiąż nierówność $x^4 + x^2 \geqslant 2x$.

Zadanie 21. (**0–4**, *CKE - informator do matury 2023 - poziom rozszerzony)*

Rozwiąż nierówność

$$(2 - \cos x)^2 \leqslant 4\sin^2\frac{x}{2} - 4\cos^2\frac{x}{2} + 4{,}75$$

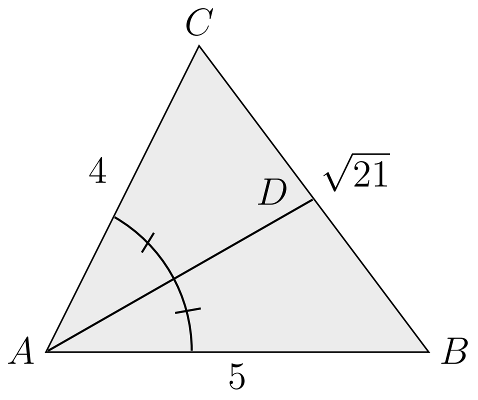
w zbiorze $(0, \pi)$.

Zadanie 22. (**0–4**, *autorskie, na wzór CKE czerwiec 2019 - poziom rozszerzony)*

Miara kąta wewnętrznego n-kąta foremnego jest o $5°$ mniejsza od miary kąta wewnętrznego $(n + 1)$-kąta foremnego. Oblicz n.

Zadanie 23. (**0–1**, *CKE - informator do matury 2023 - poziom podstawowy)*

Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AB| = 5$, $|BC| = \sqrt{21}$, $|AC| = 4$. Dwusieczna kąta $\measuredangle CAB$ przecina bok BC w punkcie D (zobacz rysunek poniżej).



Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1.,2. albo 3.

Długość odcinka BD jest równa

A.	$\lvert BD\rvert = \frac{1}{2}\sqrt{21}$	ponieważ z twierdzenia o dwusiecznej wynika, że	**1.**	$\frac{\lvert AB\rvert}{\lvert AC\rvert} = \frac{\lvert BC\rvert}{\lvert BD\rvert}$
B.	$\lvert BD\rvert = \frac{5}{9}\sqrt{21}$		**2.**	$\lvert BD\rvert = \lvert AC\rvert$
C.	$\lvert BD\rvert = \frac{4}{5}\sqrt{21}$		**3.**	$\frac{\lvert AB\rvert}{\lvert AC\rvert} = \frac{\lvert BD\rvert}{\lvert DC\rvert}$

Zadanie 24. (**0–2**, *autorskie)*

Rozwiąż trójkąt o bokach 5 cm i 10 cm i kącie prostym zawartym pomiędzy podanymi bokami.

Zadanie 25. (**0–2**, *CKE grudzień 2014 - arkusz próbny - poziom podstawowy)*

Czas połowicznego rozpadu pierwiastka to okres, jaki jest potrzebny, by ze 100% pierwiastka pozostało 50% Oznacza to, że ilość pierwiastka pozostała z każdego grama po x okresach rozpadu połowicznego wyraża się wzorem $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
W przypadku izotopu jodu ^{131}I czas połowicznego rozpadu jest równy 8 dni. Wyznacz najmniejszą liczbę dni, po upływie których z 1 g ^{131}I pozostanie nie więcej niż 0,125 g tego pierwiastka.

Zadanie 26. (**0–6**, *CKE maj 2017 - arkusz dla starej podstawy programowej - poziom rozszerzony)*

Przekątne sąsiednich ścian bocznych prostopadłościanu wychodzące z jednego wierzchołka tworzą z jego podstawą kąty o miarach $\frac{\pi}{3}$ i α. Cosinus kąta między tymi przekątnymi jest równy $\frac{\sqrt{6}}{4}$. Wyznacz miarę kąta α.

Zadanie 27. (**0–2**, *autorskie)*

Niech $a_{15} = 9$ i $r = 3$. Wyznacz sześćdziesiąty dziewiąty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) określonego dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$.

Skorowidz

Zestawienie pojęć występujących w książce.

„Pracuj tak, jakby wszystko zależało od Ciebie."

św. Augustyn z Hippony (354-430)

PROGRAMTICA

Nauczanie z przygodą

Pozycja pt. **„Czego nie znajdziesz w tablicach maturalnych z matematyki?"** zawiera kilkadziesiąt mniej znanych i wykorzystywanych zagadnień, niejednokrotnie przewijających się w zadaniach podczas egzaminów dojrzałości z matematyki, a także podczas prac klasowych. Kompendium to może być wykorzystywane przez uczniów szkół średnich uczących się do sprawdzianów, egzaminów, ale również ich nauczycieli, którzy chcieliby lepiej przygotować do nich swoich podopiecznych.

O Autorze

Konstanty Dmochowski jest absolwentem Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Z wykształcenia nauczyciel matematyki oraz informatyki, zawodowo korepetytor i twórca materiałów dydaktycznych. Przygotowuje uczniów do egzaminu maturalnego, jednakże zdarza mu się pomagać także w zakresie analizy matematycznej i metod numerycznych.

I SBN 978- 83- 966226- 2- 4

9788396622624

bookplan.pl