

Spis treści

Przedmowa	7
Oznaczenia	9
1 Badamy zbiory i relacje	11
1.1 Wykazujemy proste tożsamości	11
1.2 Znajdujemy zbiory na płaszczyźnie	21
1.3 Znajdujemy kresy zbiorów liczbowych	26
1.4 Sprawdzamy, czy \mathcal{R} jest relacją równoważności, szukamy klas abstrakcji i sporządzamy wykres	30
1.5 Zadania do pracy własnej	37
2 Badamy podstawowe własności funkcji	39
2.1 Szukamy zbioru wartości i poziomicy	39
2.2 Sprawdzamy, czy funkcja jest injekcją, surjekcją lub bijekcją, oraz szukamy odwzorowań odwrotnych	45
2.3 Znajdujemy obrazy i przeciwobrazy zbiorów	52
2.4 Zadania do pracy własnej	56
3 Definiujemy odległość w zbiorach	58
3.1 Badamy, czy podana funkcja jest metryką	58
3.2 Rysujemy kulę i odcinek	62
3.3 Zadania do pracy własnej	69
4 Wykorzystujemy indukcję matematyczną	70
4.1 Dowodzimy podzielności liczb i wielomianów	70

4.2	Wykazujemy równania i nierówności	74
4.3	Dowodzimy kilku ważnych wzorów	82
4.4	Zadania do pracy własnej	93
5	Badamy zbieżność i szukamy granic ciągów	94
5.1	Kilka typowych „chwytów” przydatnych przy obliczaniu granic ciągów	94
5.2	Wykorzystujemy różne kryteria	105
5.3	Badamy ciąg rekurencyjny	117
5.4	Gdy ciąg oscyluje	123
5.5	Dowodzimy rozbieżności ciągu	129
5.6	Zadania do pracy własnej	133
6	Zbiory otwarte, domknięte, zwarte	135
6.1	Badamy otwartość i domkniętość	135
6.2	Badamy zwartość	142
6.3	Zadania do pracy własnej	145
7	Znajdujemy granice funkcji	146
7.1	Kilka typowych „chwytów” stosowanych przy obliczaniu granic funkcji	146
7.2	Stosujemy podstawienia	153
7.3	Zadania do pracy własnej	159
8	Badamy ciągłość i jednostajną ciągłość funkcji	161
8.1	Wykazujemy ciągłość funkcji metodami Heinego i Cauchy’ego	161
8.2	Badamy funkcję w punktach „sklejenia”	166
8.3	Badamy, czy funkcja jest jednostajnie ciągła	177
8.4	Zadania do pracy własnej	182
9	Funkcje różniczkowalne	184
9.1	Obliczamy pochodną funkcji z definicji	184
9.2	Badamy różniczkowalność funkcji	187
9.3	Zadania do pracy własnej	192
10	Różniczkujemy funkcje	194
10.1	Znajdujemy pochodną funkcji odwrotnej	194
10.2	Rozwiązujemy kilka złożonych problemów	198
10.3	Zadania do pracy własnej	202

11 Wykorzystujemy pochodną do badania niektórych własności funkcji	203
11.1 Wykazujemy tożsamości i nierówności	203
11.2 Korzystamy z twierdzeń Rolle’a i Lagrange’a	210
11.3 Badamy krzywe na płaszczyźnie — styczność, kąty przecięcia	214
11.4 Obliczamy granice metodą de l’Hospitála	222
11.5 Zadania do pracy własnej	231
12 Wyższe pochodne i wzór Taylora	233
12.1 Wykazujemy formuły na pochodne wyższych rzędów metodą indukcji	233
12.2 Rozwijamy funkcje	239
12.3 Wykorzystujemy wzór Taylora do obliczania granic funkcji . .	245
12.4 Zadania do pracy własnej	250
13 Szukamy ekstremów i badamy przebieg funkcji	251
13.1 Znajdujemy najmniejszą i największą wartość funkcji na danym zbiorze	251
13.2 Badamy funkcję od A do Z	256
13.3 Zadania do pracy własnej	266
14 Badamy zbieżność szeregów	267
14.1 Stosujemy oszacowania	267
14.2 Wykorzystujemy różne kryteria	272
14.3 Rozwiązujemy kilka ciekawych problemów	286
14.4 Zadania do pracy własnej	292
15 Obliczamy całki nieoznaczone	294
15.1 Całkujemy przez części i przez podstawienie	294
15.2 Stosujemy metodę wzorów rekurencyjnych	307
15.3 Całkujemy funkcje wymierne	313
15.4 Całkujemy funkcje wymierne od funkcji trygonometrycznych	318
15.5 Wykorzystujemy podstawienia Eulera	322
15.6 Wykorzystujemy podstawienia hiperboliczne i trygonometryczne	328
15.7 Zadania do pracy własnej	332

16 Zbieżność ciągów i szeregów funkcyjnych	334
16.1 Znajdujemy granicę ciągu funkcji	334
16.2 Badamy zbieżność jednostajną ciągu funkcji	338
16.3 Badamy zbieżność jednostajną szeregu funkcji	344
16.4 Znajdujemy sumy szeregów	349
16.5 Zadania do pracy własnej	355

Przedmowa

Niniejszy zbiór zadań planowany jest jako pierwsza część z serii trzech obejmujących całość zagadnień z analizy matematycznej, z jakimi studenci nauk ścisłych spotykają się w ramach początkowych dwóch lub trzech semestrów zajęć. Powstał on na podstawie moich doświadczeń z okresu kilkunastu lat prowadzenia zajęć dydaktycznych z tego niełatwego przedmiotu na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego. Dla niektórych zadań inspirację stanowiły materiały dydaktyczne, jakimi od dawna posługują się pracownicy Katedry Metod Matematycznych Fizyki. W zamyśle zbiór ten ma być odmienny od innych dostępnych na rynku i powinien stanowić dla nich uzupełnienie. Podstawowym jego założeniem jest, aby wszystkie zamieszczone problemy (poza tymi, które są przeznaczone do pracy własnej) były w pełni oraz szczególnie — nawet na kilku stronach — rozwiązane, aby żadne zagadnienie nie pozostało niewyjaśnione, a żadne pytanie, jakie mogłoby nasunąć się Czytelnikowi podczas analizowania rozwiązania, nie pozostało bez odpowiedzi. Zdaję sobie sprawę, że zamiar ten powiódł się co najwyżej w części. Sprawiłoby mi jednak dużą satysfakcję, gdyby student po uważnym prześledzeniu konkretnego zadania uznał, że rozumie dane zagadnienie w stopniu zbliżonym do tego, jaki wyniósłby z ćwiczeń rachunkowych na uczelni. Z tego względu sporo miejsca zostało w książce poświęcone na drobne przedstawienie każdego rozumowania czy szczególnie — dla niektórych zapewne nawet zbyt elementarne — przekształcenia wzorów.

Taki profil książki pociąga jednak za sobą pewne ograniczenia. Przede wszystkim nie można w niej umieścić zbyt wielu zadań, aby nadmiernie się nie rozrosła. Z tego samego powodu nie ma też w niej miejsca na teoretyczne

wprowadzenia, jakie zwyczajowo znajdują się na początku każdego rozdziału typowego zbioru zadań. Zmuszony byłem przyjąć, że student zna teoretyczną stronę zagadnień ze swojego wykładu bądź dysponuje dobrym podręcznikiem do analizy matematycznej, jakich jest wiele na rynku. Ze względu na ograniczone rozmiary tej książki zamieszczanie teoretycznych podrozdziałów musiałoby skutkować ograniczeniami w tych jej częściach, które, moim zdaniem, są w niej najważniejsze i które stanowiły główny cel jej opracowania. Zatem niektóre definicje czy twierdzenia, i to tylko wtedy, gdy ich przypomnienie jest naprawdę niezbędne, włączone zostały do rozwiązań konkretnych zadań, w których są bezpośrednio stosowane. Moja praktyka dydaktyczna wskazuje, że taki układ jest przez studentów chętniej akceptowany, gdyż, zamiast studiować kilka stron teoretycznych i abstrakcyjnych rozważań, otrzymują natychmiast zastosowanie danego twierdzenia czy definicji.

Z tym wiąże się też kwestia języka używanego w niniejszej książce. Staralem się go maksymalnie uprościć i — w miejsce terminów abstrakcyjnych — używać pojęć intuicyjnie jasnych (a nawet potocznych!), choć ktoś może, i słusznie, sformułować zarzut, iż nie są one wystarczająco precyzyjne. Jednakże celem moim było takie przedstawianie zagadnień, aby student bez większego wysiłku umiał przełożyć trudne pojęcia na konkrety, które są o wiele łatwiej zrozumiałe i przyswajalne. To także obserwacja z wielu lat pracy na uczelni. Zrozumienie tematu przez odbiorców zależy w dużej mierze od doboru odpowiednio prostego języka, zwłaszcza na pierwszych latach studiów. Na podniesienie poziomu abstrakcji na pewno znajdzie się czas w dalszym toku kształcenia. Na początku studiów dobrze jest uzmysłowić słuchaczom, że wiele nowych pojęć czy twierdzeń może być przez nich opanowanych już na gruncie dotychczasowej ich wiedzy i wyrobionej intuicji.

Licząc, że niniejsza pozycja przyczyni się choć w niewielkim stopniu do lepszego zrozumienia (od strony praktycznej) niektórych zagadnień analizy, zachęcam jednocześnie do korzystania z innych zbiorów zadań, które dostarczą materiału do własnej pracy, a których ta książka na pewno nie zastąpi.

Na koniec chciałbym podkreślić, że wszelkie uwagi, które pomogłyby w ulepszeniu tego zbioru, w usunięciu zauważonych błędów, w rozszerzeniu objaśnień, które zdaniem Czytelnika okazały się jednak zbyt skąpe bądź niejasne, czy włączeniu do rozwiązań zagadnień pominiętych, a wiążących się bezpośrednio z rozważanymi problemami, będą dla mnie bardzo cenne¹.

Tomasz Radożycki

¹E-mail: ksiazkimf@gmail.com

Oznaczenia

Poniżej zamieszczamy używane w zbiorze oznaczenia i konwencje, aby uniknąć ich powtarzania w każdym rozdziale, w którym będą one stosowane.

- Liczby całkowite dodatnie (bez zera) oznaczamy symbolem \mathbb{N} :

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\},$$

i nazywać będziemy „naturalnymi”. Jeśli zależeć nam będzie na włączeniu zera do tego zbioru, to napiszemy po prostu $\mathbb{N} \cup \{0\}$, a liczby te nazwiemy „naturalnymi z zerem”.

- Zbiór liczb rzeczywistych dodatnich, wymiernych dodatnich czy całkowitych dodatnich oznaczać będziemy odpowiednio symbolami \mathbb{R}_+ , \mathbb{Q}_+ oraz \mathbb{Z}_+ . Zachodzi naturalnie $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$. Analogicznie symbole \mathbb{R}_- , \mathbb{Q}_- i \mathbb{Z}_- odnoszą się będą do liczb ujemnych.
- Jeśli w konkretnym zadaniu nie są wprowadzone inne oznaczenia, to symbolem X oznaczać będziemy całą przestrzeń.
- We wszystkich zadaniach, poza tymi zawartymi w rozdziale 3 oraz ostatnim z podrozdziału 6.1, używamy jako domyślnej metryki euklidesowej opartej na twierdzeniu Pitagorasa, która szczegółowo omówiona jest w zadaniu 1 podrozdziału 3.1. W przypadku zbioru \mathbb{R} redukuje się ona do „metryki naturalnej”, a więc takiej, w której odległość dwóch liczb x i y dana jest wzorem $d(x, y) = |x - y|$.
- Przyjmujemy, że kula jest otwarta. Przykładowo kula o środku w pewnym punkcie x_0 i promieniu r to zbiór punktów x spełniających warunek: $d(x_0, x) < r$. Jeśli w jakimś zadaniu potrzebna nam będzie kula domknięta, to napiszemy to w sposób jawny.

- Funkcja f jako odwzorowanie zbioru X w zbiór Y wymaga, formalnie rzecz biorąc, oprócz przepisu przyporządkowania (np. wzoru na $f(x)$) podania także samych zbiorów X i Y . Przyjmujemy zasadę, że jeśli w tekście zadania nie są one ustalone, to przez dziedzinę funkcji rozumiemy maksymalnie obszerny zbiór, dla którego wzór funkcji ma sens. Z kontekstu omawianych zagadnień wynika zawsze, co rozumiemy przez to sformułowanie. Przykładowo w podręczniku, w którym mowa jest wyłącznie o funkcjach rzeczywistych, na pewno nie będziemy rozszerzać dziedziny funkcji logarytm na płaszczyznę zespoloną. Podobnie, jeśli nie jest podany zbiór Y , to domyślnie uważać go będziemy za tożsamy ze zbiorem wartości funkcji f .
- Dziedzinę funkcji oznaczać będziemy na ogół symbolem D .
- Poziomice (warstwy) funkcji f zdefiniowane jako zbiory

$$\{x \in D \mid f(x) = h\},$$

gdzie $h \in Y$, oznaczać będziemy symbolem D_h . Równoważnie można także napisać: $D_h = f^{-1}(\{h\})$.

- Przez pojęcie „funkcja rosnąca” rozumiemy funkcję liczbową spełniającą

$$\forall_{x_1, x_2 \in D} x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

Podobnie z „funkcją malejącą” będziemy mieć do czynienia, gdy

$$\forall_{x_1, x_2 \in D} x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2).$$

Jeśli spełnione są jedynie warunki $f(x_1) \leq f(x_2)$ lub $f(x_1) \geq f(x_2)$, to będziemy mówić o „funkcji niemalejącej” lub „nierosnącej”.

- Symbol \log oznaczać będzie logarytm naturalny: $\log x = \log_e x$.
- Symboli $:=$ lub $=:$ używać będziemy wszędzie tam, gdzie dana równość ma charakter definicji bądź wprowadzenia nowego oznaczenia i pragniemy to szczególnie podkreślić.
- Klasy równoważności (abstrakcji) elementu x w relacji \mathcal{R} oznaczymy symbolem $[x]_{\mathcal{R}}$.
- Symbolu \simeq używać będziemy jako skrótowego zapisu oznaczającego „zachowuje się jak”. Jeśli na przykład napiszemy, że dla bardzo dużych x $a(x) \simeq b(x)$, to będziemy przez to rozumieć, iż

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a(x)}{b(x)} = 1.$$