# Spis treści

# Przedmowa

Niniejszy zbiór zadań planowany jest jako pierwsza część z serii trzech obejmujących całość zagadnień z analizy matematycznej, z jakimi studenci nauk ścisłych spotykają się w ramach początkowych dwóch lub trzech semestrów zajęć. Powstał on na podstawie moich doświadczeń z okresu kilkunastu lat prowadzenia zajęć dydaktycznych z tego niełatwego przedmiotu na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego. Dla niektórych zadań inspirację stanowiły materiały dydaktyczne, jakimi od dawna posługują się pracownicy Katedry Metod Matematycznych Fizyki. W zamyśle zbiór ten ma być odmienny od innych dostępnych na rynku i powinien stanowić dla nich uzupełnienie. Podstawowym jego założeniem jest, aby wszystkie zamieszczone problemy (poza tymi, które są przeznaczone do pracy własnej) były w pełni oraz szczegółowo — nawet na kilku stronach — rozwiązane, aby żadne zagadnienie nie pozostało niewyjaśnione, a żadne pytanie, jakie mogłoby nasunąć się Czytelnikowi podczas analizowania rozwiązania, nie pozostało bez odpowiedzi. Zdaję sobie sprawę, że zamiar ten powiódł się co najwyżej w części. Sprawiłoby mi jednak dużą satysfakcję, gdyby student po uważnym prześledzeniu konkretnego zadania uznał, że rozumie dane zagadnienie w stopniu zbliżonym do tego, jaki wyniósłby z ćwiczeń rachunkowych na uczelni. Z tego względu sporo miejsca zostało w książce poświęcone na drobiazgowe przedstawienie każdego rozumowania czy szczegółowe — dla niektórych zapewne nawet zbyt elementarne — przekształcenia wzorów.

Taki profil książki pociąga jednak za sobą pewne ograniczenia. Przede wszystkim nie można w niej umieścić zbyt wielu zadań, aby nadmiernie się nie rozrosła. Z tego samego powodu nie ma też w niej miejsca na teoretyczne wprowadzenia, jakie zwyczajowo znajdują się na początku każdego rozdziału typowego zbioru zadań. Zmuszony byłem przyjąć, że student zna teoretyczną stronę zagadnień ze swojego wykładu bądź dysponuje dobrym podręcznikiem do analizy matematycznej, jakich jest wiele na rynku. Ze względu na ograniczone rozmiary tej książki zamieszczanie teoretycznych podrozdziałów musiałoby skutkować ograniczeniami w tych jej częściach, które, moim zdaniem, są w niej najważniejsze i które stanowiły główny cel jej opracowania. Zatem niektóre definicje czy twierdzenia, i to tylko wtedy, gdy ich przypomnienie jest naprawdę niezbędne, włączone zostały do rozwiązań konkretnych zadań, w których są bezpośrednio stosowane. Moja praktyka dydaktyczna wskazuje, że taki układ jest przez studentów chętniej akceptowany, gdyż, zamiast studiować kilka stron teoretycznych i abstrakcyjnych rozważań, otrzymują natychmiast zastosowanie danego twierdzenia czy definicji.

Z tym wiąże się też kwestia języka używanego w niniejszej książce. Starałem się go maksymalnie uprościć i — w miejsce terminów abstrakcyjnych — używać pojęć intuicyjnie jasnych (a nawet potocznych!), choć ktoś może, i słusznie, sformułować zarzut, iż nie są one wystarczająco precyzyjne. Jednakże celem moim było takie przedstawianie zagadnień, aby student bez większego wysiłku umiał przełożyć trudne pojęcia na konkrety, które są o wiele łatwiej zrozumiałe i przyswajalne. To także obserwacja z wielu lat pracy na uczelni. Zrozumienie tematu przez odbiorców zależy w dużej mierze od doboru odpowiednio prostego języka, zwłaszcza na pierwszych latach studiów. Na podniesienie poziomu abstrakcji na pewno znajdzie się czas w dalszym toku kształcenia. Na początku studiów dobrze jest uzmysłowić słuchaczom, że wiele nowych pojęć czy twierdzeń może być przez nich opanowanych już na gruncie dotychczasowej ich wiedzy i wyrobionej intuicji.

Licząc, że niniejsza pozycja przyczyni się choć w niewielkim stopniu do lepszego zrozumienia (od strony praktycznej) niektórych zagadnień analizy, zachęcam jednocześnie do korzystania z innych zbiorów zadań, które dostarczą materiału do własnej pracy, a których ta książka na pewno nie zastąpi.

Na koniec chciałbym podkreślić, że wszelkie uwagi, które pomogłyby w ulepszeniu tego zbioru, w usunięciu zauważonych błędów, w rozszerzeniu objaśnień, które zdaniem Czytelnika okazały się jednak zbyt skąpe bądź niejasne, czy włączeniu do rozwiązań zagadnień pominiętych, a wiążących się bezpośrednio z rozważanymi problemami, będą dla mnie bardzo cenne[1].

*Tomasz Radożycki*

[1] E-mail: ksiazkimf@gmail.com

# Oznaczenia

Poniżej zamieszczamy używane w zbiorze oznaczenia i konwencje, aby uniknąć ich powtarzania w każdym rozdziale, w którym będą one stosowane.

- Liczby całkowite dodatnie (bez zera) oznaczamy symbolem $\mathbb{N}$:
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} ,$$
i nazywać będziemy „naturalnymi”. Jeśli zależeć nam będzie na włączeniu zera do tego zbioru, to napiszemy po prostu $\mathbb{N} \cup \{0\}$, a liczby te nazwiemy „naturalnymi z zerem”.
- Zbiór liczb rzeczywistych dodatnich, wymiernych dodatnich czy całkowitych dodatnich oznaczać będziemy odpowiednio symbolami $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Q}_+$ oraz $\mathbb{Z}_+$. Zachodzi naturalnie $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$. Analogicznie symbole $\mathbb{R}_-$, $\mathbb{Q}_-$ i $\mathbb{Z}_-$ odnosić się będą do liczb ujemnych.
- Jeśli w konkretnym zadaniu nie są wprowadzone inne oznaczenia, to symbolem $X$ oznaczać będziemy całą przestrzeń.
- We wszystkich zadaniach, poza tymi zawartymi w rozdziale 3 oraz ostatnim z podrozdziału 6.1, używamy jako domyślnej metryki euklidesowej opartej na twierdzeniu Pitagorasa, która szczegółowo omówiona jest w zadaniu 1 podrozdziału 3.1. W przypadku zbioru $\mathbb{R}$ redukuje się ona do „metryki naturalnej”, a więc takiej, w której odległość dwóch liczb $x$ i $y$ dana jest wzorem $d(x, y) = |x - y|$.
- Przyjmujemy, że kula jest otwarta. Przykładowo kula o środku w pewnym punkcie $x_0$ i promieniu $r$ to zbiór punktów $x$ spełniających warunek: $d(x_0, x) < r$. Jeśli w jakimś zadaniu potrzebna nam będzie kula domknięta, to napiszemy to w sposób jawny.

- Funkcja $f$ jako odwzorowanie zbioru $X$ w zbiór $Y$ wymaga, formalnie rzecz biorąc, oprócz przepisu przyporządkowania (np. wzoru na $f(x)$) podania także samych zbiorów $X$ i $Y$. Przyjmujemy zasadę, że jeśli w tekście zadania nie są one ustalone, to przez dziedzinę funkcji rozumiemy maksymalnie obszerny zbiór, dla którego wzór funkcji ma sens. Z kontekstu omawianych zagadnień wynika zawsze, co rozumiemy przez to sformułowanie. Przykładowo w podręczniku, w którym mowa jest wyłącznie o funkcjach rzeczywistych, na pewno nie będziemy rozszerzać dziedziny funkcji logarytm na płaszczyznę zespoloną. Podobnie, jeśli nie jest podany zbiór $Y$, to domyślnie uważać go będziemy za tożsamy ze zbiorem wartości funkcji $f$.
- Dziedzinę funkcji oznaczać będziemy na ogół symbolem $D$.
- Poziomice (warstwy) funkcji $f$ zdefiniowane jako zbiory

$$\{x \in D \mid f(x) = h\} ,$$

gdzie $h \in Y$, oznaczać będziemy symbolem $D_h$. Równoważnie można także napisać: $D_h = f^{-1}(\{h\})$.
- Przez pojęcie „funkcja rosnąca" rozumieć będziemy funkcję liczbową spełniającą

$$\forall_{x_1,x_2 \in D} \;\; x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2) .$$

Podobnie z „funkcją malejącą" będziemy mieć do czynienia, gdy

$$\forall_{x_1,x_2 \in D} \;\; x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2) .$$

Jeśli spełnione są jedynie warunki $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ lub $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, to będziemy mówić o „funkcji niemalejącej" lub „nierosnącej".
- Symbol log oznaczać będzie logarytm naturalny: $\log x = \log_e x$.
- Symboli $:=$ lub $=:$ używać będziemy wszędzie tam, gdzie dana równość ma charakter definicji bądź wprowadzenia nowego oznaczenia i pragniemy to szczególnie podkreślić.
- Klasy równoważności (abstrakcji) elementu $x$ w relacji $\mathcal{R}$ oznaczymy symbolem $[x]_{\mathcal{R}}$.
- Symbolu $\simeq$ używać będziemy jako skrótowego zapisu oznaczającego „zachowuje się jak". Jeśli na przykład napiszemy, że dla bardzo dużych $x$ $a(x) \simeq b(x)$, to będziemy przez to rozumieć, iż

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a(x)}{b(x)} = 1 .$$