

Warto podkreślić, że brak uniwersalnej definicji prawdopodobieństwa sprawił, że rachunek prawdopodobieństwa jest tą dziedziną matematyki, w której istnieje szczególnie dużo paradoksów wynikających z błędnego wyobrażenia o losowości. Jednym z nich jest tzw. paradoks Bertranda. Zadanie polega na znalezieniu prawdopodobieństwa tego, że losowo poprowadzona cięciwa będzie dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg o promieniu R . Na skutek istnienia różnych możliwości pojmowania wyrażenia „losowo poprowadzona” (czyli metod wyboru przestrzeni probabilistycznej) osoby rozwiązujące powyższy problem mogą dojść nawet do trzech różnych wyników: $1/3$, $1/2$ i $1/4$. Dokładny opis tego paradoksu można znaleźć na przykład w pracy Bertranda (1889).

1.3. Opis problemu decyzyjnego

Zanim przejdziemy do rozdziału 2, w którym to omówiono istniejące reguły decyzyjne w warunkach niepewności oraz zaproponowano różne nowe, zmodyfikowane podejścia, warto szczegółowo opisać wszystkie elementy i cechy problemu decyzyjnego. Ich znajomość pozwala bowiem:

- ustalić cel i warunki ograniczające decyzję,
- zbudować zbiór decyzji dopuszczalnych,
- wyodrębnić wszystkie istotne kryteria oceny decyzji,
- dokonać oceny każdej decyzji na podstawie tychże kryteriów,
- zbudować model decyzyjny umożliwiający wybór decyzji optymalnej (tj. najlepszej w zbiorze rozwiązań dopuszczalnych) lub wystarczającej (zadowalającej).

Zauważmy, że określenia „problem decyzyjny” i „sytuacja decyzyjna” bywają w literaturze definiowane w różny sposób. **Sytuacja decyzyjna** może być rozumiana jako zbiór wszystkich czynników (zależnych od decydenta i niezależnych od niego) mających wpływ na podjęcie przez decydenta decyzji w procesie decyzyjnym, a **problem decyzyjny** może być traktowany jako sytuacja problemowa, w której podmiot staje przed koniecznością wyboru jednego z co najmniej dwóch możliwych wariantów działania. W rozprawie natomiast te dwa pojęcia stosowane są zamiennie, by uniknąć nadmiernych powtórzeń, przy czym definiowane są identycznie, jako zbiór wszystkich czynników mających wpływ na wybór przez decydenta jednego z co najmniej dwóch możliwych wariantów decyzyjnych. Na początku niniejszego podrozdziału użyto także pojęcia „**modelu decyzyjnego**”. Oznacza ono odwzorowanie wycinka rzeczywistości, które w sposób syntetyczny opisuje problem decyzyjny (Czechowska, 2014).

1.3.1. Gry z naturą i gry z drugim graczem

W pracach poświęconych podejmowaniu decyzji w warunkach niepewności autorzy wyodrębniają najczęściej dwie podstawowe sytuacje: grę z drugim graczem (grę dwuosobową) i grę z naturą (Ignasiak, 1996; Sikora, 2008).

W pierwszym przypadku (**gra z drugim graczem**) na rezultat końcowy wpływ ma zarówno wariant decyzyjny wybrany przez decydenta, jak i decyzja podjęta przez drugi podmiot. Tak zdefiniowaną grą jest dowolna sytuacja konfliktowa, a graczem może być człowiek, przedsiębiorstwo, władze danego państwa, a nawet zwierzę. Obaj gracze są zainteresowani wynikiem gry (tj. maksymalizacją wygranej), zatem poszukiwać należy rozwiązania, które będzie satysfakcjonujące dla obu stron¹⁸.

W drugim przypadku (**gra z naturą**) wynik decyzji podjętej przez podmiot zależy nie tylko od samego wyboru decydenta, lecz również od stanu świata zewnętrznego (scenariusza), który wystąpi. „Przeciwnikiem” dla danego gracza jest więc natura, dla której wynik gry nie jest istotny. Natura nie zamierza wygrać z podmiotem decyzyjnym. Dlatego też problem rozwiązuje się tylko z punktu widzenia decydenta. W grze z naturą przeciwnik decydenta traktowany jest jako gracz „nierozumny”, pasywny.

1.3.2. Macierz wypłat i planowanie scenariuszowe

Grę z drugim graczem bądź grę z naturą można przedstawić za pomocą **macierzy wypłat** (*payoff matrix, decision matrix*). W pierwszym wypadku reprezentuje ona poszczególnych graczy wraz z ich wariantami decyzyjnymi (tabela 1.1), a w drugim – gracza i naturę, przy czym graczowi przypisane są decyzje, a naturze – scenariusze (tabela 1.2).

Istotnym elementem problemu decyzyjnego są niewątpliwie **warianty decyzyjne** (*decision variants*), nazywane także w literaturze decyzjami (*decisions*), alternatywami (*alternatives*), opcjami (*options*) oraz rozwiązaniami alternatywnymi (*alternative courses of action* (Ravindran i in., 1987)) gracza/decydenta. Na ten obszar problemu decyzyjnego podmiot ma wpływ – może bowiem dokonać wyboru decyzji.

¹⁸ Teoria zajmująca się między innymi grami dwuosobowymi nosi nazwę teorii gier. Istnieją gry o sumie stałej, w tym gry o sumie zerowej, lub zmiennej (w pierwszym przypadku suma wypłat obu graczy, niezależnie od wybranych strategii, jest zawsze stała); gry sprawiedliwe (wartość oczekiwana wypłaty każdego gracza jest taka sama) i niesprawiedliwe. W ramach teorii gier, oprócz gier dwuosobowych, analizuje się gry wieloosobowe. Przedmiotem badań są zarówno gry, w których gracze dysponują pełną wiedzą o wypłatach wszystkich graczy, jak i gry, w których gracze nie posiadają pełnej wiedzy na ten temat (Ignasiak, 1996; Pacuit i Roy, 2012; Patkowski, 2012; Ross, 2010; Sikora, 2008; Straffin, 1996; Trzaskalik, 2008).

Tabela 1.1. Macierz wypłat (gra z drugim graczem)

	Gracz A				
Gracz B	A_1	...	A_j	...	A_n
B_1	$b_{1,1}, a_{1,1}$...	$b_{1,j}, a_{1,j}$...	$b_{1,n}, a_{1,n}$
⋮	⋮	⋱	⋮	⋱	⋮
B_i	$b_{i,1}, a_{i,1}$...	$b_{i,j}, a_{i,j}$...	$b_{i,n}, a_{i,n}$
⋮	⋮	⋱	⋮	⋱	⋮
B_m	$b_{m,1}, a_{m,1}$...	$b_{m,j}, a_{m,j}$...	$b_{m,n}, a_{m,n}$

Objaśnienia: n – liczba wariantów decyzyjnych gracza A ; m – liczba wariantów decyzyjnych gracza B ; $b_{i,j}$ – wypłata gracza B w wypadku wyboru decyzji B_i i A_j przez odpowiednio gracza B i A , $a_{i,j}$ – wypłata gracza A w wypadku wyboru decyzji B_i i A_j przez odpowiednio gracza B i A .

Tabela 1.2. Macierz wypłat (gra z naturą)

	Decydent				
Natura	A_1	...	A_j	...	A_n
S_1	$a_{1,1}$...	$a_{1,j}$...	$a_{1,n}$
⋮	⋮	⋱	⋮	⋱	⋮
S_i	$a_{i,1}$...	$a_{i,j}$...	$a_{i,n}$
⋮	⋮	⋱	⋮	⋱	⋮
S_m	$a_{m,1}$...	$a_{m,j}$...	$a_{m,n}$

Objaśnienia: n – liczba wariantów decyzyjnych decydenta A ; m – liczba scenariuszy (stanów natury S); $a_{i,j}$ – wypłata decydenta A w przypadku wyboru decyzji A_j i zajścia scenariusza S_i .

Na warianty decyzyjne wybierane przez przeciwnika (w wypadku gry z drugim graczem) i na **scenariusze** (w wypadku gry z naturą) decydent już nie ma wpływu. Wyjątek stanowi oczywiście sytuacja, w której w grze dwuosobowej drugi gracz podejmuje decyzję dopiero po poznaniu wariantu wybranego przez pierwszego gracza – wówczas wspomniany wpływ występuje, lecz tylko w jednym kierunku.

Wyjaśnienia wymaga z pewnością **sposób szacowania wypłat** w obu macierzach. Wartości mogą być ustalane przez osoby zainteresowane (tj. przez graczy) bądź przez ekspertów w danej dziedzinie. Pierwsze podejście pociąga za sobą generowanie subiektywnych wielkości, drugie zaś może prowadzić do ustalenia bardziej obiektywnych wypłat. W obu wypadkach, choć w odmiennym zakresie,

zalecane jest przekształcenie pierwotnych wartości w takich sposób, aby uwzględnione zostały preferencje decydenta (Ravindran i in., 1987), zob. podrozdział 1.3.6. W zależności od wiedzy podmiotu wyznaczającego poszczególne wygrane, wypłaty mogą być prezentowane punktowo (za pomocą konkretnych wartości) lub przedziałowo (za pomocą dolnej i górnej granicy przedziału) (Huynh, Hu, Nakamori i Kreinovich, 2009; Shashikhin, 2004).

Z macierzą wypłat ustalaną dla danego problemu decyzyjnego ściśle wiąże się tzw. **planowanie scenariuszowe** (*scenario planning*, SP), lub **metoda scenariuszowa**, które(a) stanowi technikę ułatwiającą identyfikowanie niepewnych i niekontrolowanych czynników mogących mieć wpływ na rezultaty podjętych decyzji. W ramach planowania scenariuszowego wyodrębniane są właśnie poszczególne decyzje, scenariusze i wypłaty im towarzyszące. Pojęcie scenariusza doczekało się w literaturze bardzo wielu definicji (Chermack, Lynham i Ruona, 2001; Porter, 1985; Schwartz, 1991), lecz wszyscy autorzy zgodnie uznają, że każdy stan powinien być wiarygodny, akceptowalny i wewnętrznie zgodny (Daszyńska-Żygadło, 2011). Ponadto van der Heijden (1996) stwierdza, że scenariusze to nie prognozy¹⁹. Reguły, którymi należy się kierować w planowaniu scenariuszowym, omówili między innymi: Dominiak (2006), Pomerol (2001), Schoemaker (1995), van der Heijden (1996) oraz Wright i Goodwin (1999), natomiast kolejne kroki tworzenia scenariuszy opisano w publikacji The Center for Innovative Leadership (1995). Montibeller i Franco (2010) kładą nacisk na to, że poszczególne scenariusze wcale nie muszą być rozłączne, a ich zbiór niekoniecznie musi być wyczerpujący, choć jest to sprzeczne z założeniami przyjętymi przez Ravindrana i współautorów (1987), gdzie akurat stany natury charakteryzowane są w zupełnie odmienny sposób: „The events are defined to be mutually exclusive and collectively exhaustive”. Autorzy tej drugiej pracy tłumaczą jednak dalej, iż oznacza to, że wystąpi tylko jeden scenariusz spośród wszystkich zidentyfikowanych potencjalnych stanów.

Planowanie scenariuszowe wykorzystywane jest przez przedsiębiorstwa, społeczność naukową, profesjonalne instytucje futurystyczne, instytucje edukacyjne. Znajduje też zastosowanie w zarządzaniu kryzysowym i w sferze publicznej (Daszyńska-Żygadło, 2011). Kierownicy projektów często korzystają z planowania scenariuszowego, gdyż jest ono wygodne w użyciu (Schoemaker, 1993, 1995; Montibeller i Franco, 2010) i pozwala spojrzeć na problem w sposób bardziej deterministyczny: „mała liczba scenariuszy prezentuje się wizualnie znacznie lepiej

¹⁹ Zgodnie z definicją zaprezentowaną przez Czerwińskiego i Guzika (1980), prognoza to sąd (tj. wypowiedź prawdziwa lub fałszywa, przy czym wartość logiczna tego sądu nie jest z reguły znana osobie wypowiadającej tę prognozę) o zajściu określonego zdarzenia w czasie określonym z dokładnością do momentu (punktu) lub okresu (przedziału), należącego do przyszłości, przy czym warunkiem zastosowania jakiegokolwiek większości metod prognostycznych jest zebranie odpowiedniej informacji o przeszłości.

aniżeli rozkład prawdopodobieństwa” (Durbach, 2014). Ze względu na charakter, opracowywane scenariusze można podzielić na scenariusze eksploracyjne – tworzące ciąg zdarzeń od sytuacji wyjściowej do możliwej przyszłości i uwzględniające trendy dominujące w otoczeniu, oraz antycypacyjne – zawierające przewidywany obraz przyszłości (Gierszewska i Romanowska, 2017).

Prezentując ideę planowania scenariuszowego, warto zadać sobie pytanie, czy w ramach SP należy też ujmować ewentualną informację o prawdopodobieństwie wystąpienia poszczególnych scenariuszy. Niektórzy autorzy twierdzą, że nieodłącznym elementem planowania scenariuszowego powinno być właśnie prawdopodobieństwo i że przypisywanie każdemu stanowi konkretnej wielkości prawdopodobieństwa (subiektywnego lub obiektywnego) przynosi wiele korzyści, między innymi usprawnia cały proces decyzyjny (Millet, 2009; Ravindran i in., 1987). Inni zaś wręcz przeciwnie – uważają, że informacji o prawdopodobieństwie nie uwzględnia się w planowaniu scenariuszowym (Michnik, 2013a, 2013b; Montibeller i Franco, 2010). Nie uwzględnia się, ponieważ w wypadku SP nie ma wymogu tworzenia wyczerpującego zbioru rozłącznych stanów natury, a taki z kolei wymóg występuje w teorii Kołmogorowa.

Na koniec tego podrozdziału powróćmy jeszcze na chwilę do samych wypłat towarzyszących poszczególnym parom ⟨scenariusz, decyzja⟩. Na razie wspomnieliśmy o możliwości przedstawienia tychże wypłat w postaci punktowej bądź przedziałowej w ramach planowania scenariuszowego. Warto jednak zaznaczyć, że niepewność można wyrazić na wiele innych sposobów.

Durbach i Stewart (2012b) wyodrębniają pięć głównych podejść modelowania niepewności. Wykorzystują one prawdopodobieństwo, „wagi decyzyjne” (*decision weights*), miary ryzyka (*explicit risk measures*), liczby rozmyte (*fuzzy numbers*) oraz właśnie scenariusze. Autorzy wspomnianej pracy traktują prawdopodobieństwo i planowanie scenariuszowe jako dwie zupełnie niezależne metody. Nie proponują oni zatem, podobnie jak Michnik (2013a), przypisywania prawdopodobieństw poszczególnym stanom natury. W ramach pierwszej kategorii Durbach i Stewart mają także na myśli niektóre rozszerzenia prawdopodobieństwa, np. stopnie wiarygodności (*degrees of belief*) (por. też Eriksson i Hajek, 2007; Huber i Schmidt-Petri, 2009; Kyburg, 2003). Ich zdaniem wagi decyzyjne (druga kategoria) stanowią zarazem rozszerzenie i uogólnienie prawdopodobieństwa. Szacowane są one przez decydentów dla wszystkich scenariuszy. Miary ryzyka z kolei (trzecia kategoria) mają za zadanie uwzględnić wpływ niepewności na preferencje decydentów. W owych miarach można uchwycić dwa składniki – pierwszy z nich to wartość (np. wartość oczekiwana), a drugi to ryzyko z tą wartością związane (np. wariancja, odchylenie standardowe, kwantyle, rozstęp). Liczby rozmyte (czwarta kategoria) służą do modelowania tzw. nieprecyzji (*imprecision*) oraz zewnętrznej i wewnętrznej niepewności (podrozdział 1.2.1). Oprócz liczb rozmytych (Zadeh, 1965) oraz związa-

nych z nimi rozmytych relacji preferencji i miękkich modeli preferencji²⁰ (Piasecki i Świtalski, 1998; Świtalski, 1988, 2002a), coraz większym zainteresowaniem cieszą się także skierowane liczby rozmyte (Kosiński, Prokopowicz i Ślęzak, 2003; Łyczkowska-Hanćkowiak i Piasecki, 2018a, 2018b; Łyczkowska-Hanćkowiak, 2017; Piasecki, 2017a, 2017b), przy czym można je stosować odrębnie dla każdej pary ⟨scenariusz, decyzja⟩ bądź dla każdego wariantu decyzyjnego (bez rozróżnienia scenariuszy). Planowanie scenariuszowe (piąta kategoria) jest więc tylko jedną z form opisu niepewności.

1.3.3. Strategie czyste i mieszane

Gdy dysponujemy już zbiorem potencjalnych scenariuszy, zestawem możliwych wariantów decyzyjnych i wypłatami dla każdej pary ⟨stan, decyzja⟩, warto odpowiedzieć sobie na pytanie, jaki rodzaj strategii nas ostatecznie interesuje. Czy zamierzamy w pełni wybrać i zrealizować jedną decyzję, czy też dopuszczamy możliwość wyboru pewnej kombinacji przynajmniej dwóch wariantów decyzyjnych? W pierwszym wypadku mamy do czynienia ze **strategią czystą** (*pure act, pure action*), w drugim zaś – ze **strategią mieszaną** (*mixed act, mixed action*), tj. liniową kombinacją wypukłą strategii czystych (Ignasiak, 1996). Istniejącym regułem decyzyjnym umożliwiającym wybór optymalnej strategii czystej bądź mieszanej został poświęcony podrozdział 2.2.

Zauważmy, że matematyczny model optymalizacyjny stosowany do wyłonienia odpowiedniej strategii czystej musi się składać z binarnych zmiennych decyzyjnych (przy czym każda zmienna dotyczy innej decyzji, a liczba zmiennych równa jest liczebności zbioru rozważanych wariantów decyzyjnych) – możliwe wartości zmiennych należą do dwuelementowego zbioru $\{0, 1\}$. Gdy natomiast celem modelu optymalizacyjnego jest ustalenie właściwej strategii mieszanej, jego zmienne decyzyjne powinny być ciągłe i przyjmować wartości z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$. Określają one udział danej decyzji w całej strategii mieszanej lub częstotliwość, z jaką należy realizować ten wariant decyzyjny.

W wielu sytuacjach decyzyjnych natura problemu nie pozwala na realizację strategii mieszanej, gdyż poszczególne decyzje wzajemnie się wykluczają. Na przykład nieopłacalne jest wykonanie w 40% planu polegającego na budowie stadionu w mieście X i w 60% planu polegającego na budowie centrum handlowego w mieście Y, gdyż w wyniku takiego działania żaden wymieniony obiekt budowlany nie mógłby być oddany do użytkowania. Problemom, w których da się wybrać i zrealizować strategię mieszaną (np. ustalenie składu portfela papierów warto-

²⁰ Miękkie modele preferencji to modele uwzględniające czynniki niemierzalne, trudno uchwytne.

ściowych, wyznaczenie struktury upraw), poświęcili swoje prace między innymi: Gaspars-Wieloch (2014c, 2015a, 2015e, 2017a), Gilboa (2009), Officer i Anderson (1968), Puppe i Schlag (2009), Sikora (2008) oraz Troutt i Pettypool (1989). Niezwykle interesujące rozważania na temat wyższości strategii mieszanych nad strategiami czystymi znajdziemy w ostatniej wymienionej pracy. Troutt i Pettypool podkreślają w niej, że dzięki dywersyfikacji rozwiązania, czyli realizacji pewnej kombinacji kilku decyzji, można znacznie zwiększyć zyski. Ich wniosek dotyczy oczywiście tylko tych problemów decyzyjnych, dla których możliwe jest poszukiwanie zarówno optymalnej strategii mieszanej, jak i optymalnej strategii czystej.

1.3.4. Decyzje realizowane jedno- i wielokrotnie

Kolejna cecha problemu decyzyjnego, od której zależy wybór stosownej reguły decyzyjnej, to jednokrotność bądź wielokrotność realizacji wyłonionej decyzji. Jeżeli wskazany wariant ma być wykonany dokładnie raz (*one-shot decision* (Guo, 2010, 2011, 2013, 2014; Guo i Ma, 2014)), to tylko jeden scenariusz ma szansę wystąpić. Jeżeli natomiast planowane jest wielokrotne wdrożenie wybranej opcji (*multi-shot decision*) w danym przedziale czasowym, to możliwe jest wystąpienie różnych scenariuszy w kolejnych momentach tego okresu. Zauważmy, że drugi przypadek (tj. wielokrotną realizację decyzji) można powiązać ze strategiami mieszanymi, pod warunkiem że zmienne decyzyjne je opisujące oznaczają częstość występowania danego wariantu decyzyjnego (a nie udział tego wariantu w strategii).

Większość reguł decyzyjnych omówionych w rozdziale 2 dotyczy jednak decyzji realizowanych jednokrotnie, gdyż w wypadku decyzji realizowanych wielokrotnie kolejne realizacje odbywają się tak naprawdę w innych okolicznościach, chociażby dlatego, że już przy drugiej realizacji znane są decydentowi efekty uzyskane po pierwszej. Posiadanie tej dodatkowej informacji może zatem go skłonić do tego, by na nowo zdefiniować i rozwiązać problem.

1.3.5. Problemy jedno- i wielokryterialne

Dotychczas nasze rozważania opierały się na założeniu, że podmiot decyzyjny przy podejmowaniu decyzji w warunkach niepewności kieruje się jednym kryterium oceny wariantów. Warto jednak podkreślić, że oprócz **jednokryterialnych problemów** istotne znaczenie mają także **wielokryterialne problemy** optymalizacyjne. Problematyka wielokryterialnego DMU, tj. MDMU (*multi-criteria decision making under uncertainty*), jest poruszana w bardzo wielu pracach, gdyż w rzeczywistych problemach decyzyjnych decydenci najczęściej kierują się więcej niż jednym kryterium (Aghdaie, Zolfani i Zavadskas, 2013; Dominiak, 2009; Durbach i Stewart,

2012b; Eiselt i Marianov, 2014; Ginevičius i Zubrecovas, 2009; Hopfe, Augenbroe i Hensen, 2013; Janjic, Andjelkovic i Docic, 2013; Korhonen, 2001; Lee, 2012; Michnik, 2013a, 2013b; Mikhaidov i Tsvetinov, 2004; Montibeller, Gummer i Tumidei, 2006; Ram, Montibeller i Morton, 2010; Seker i Zavadskas, 2017; Suo, Li i Huang, 2012; Tsauro, Chang i Yen, 2002; Wang i Elhag, 2006; Watkins, McKinney, Lasdon, Nielsen i Martin, 2000).

Gdy rozwiązywany jest wielocelowy problem w warunkach niepewności na podstawie planowania scenariuszowego, decydent ma do dyspozycji nie jedną, lecz P macierzy wypłat, gdzie P to liczba rozpatrywanych kryteriów, przy czym lista potencjalnych scenariuszy może być wspólna dla wszystkich kryteriów (tabela 1.3) bądź różna (tabela 1.4). W pierwszym przypadku mamy do czynienia z **kryteriami zależnymi** (Michnik, 2011), co oznacza, że jeżeli decydent wybierze wariant A_1 i wystąpi scenariusz S_2 , to realizacje poszczególnych celów będą równe odpowiednio $a_{2,1}^1, a_{2,1}^2, \dots, a_{2,1}^P$. W drugim przypadku **kryteria są niezależne**, zatem jeżeli podmiot decyzyjny wskaże wariant A_1 i wystąpi scenariusz S_2^1 w ramach pierwszego celu, to realizacja tego celu wyniesie $a_{2,1}^1$, natomiast realizacja pozostałych kryteriów niekoniecznie musi się wiązać z drugim stanem natury. Przykładowy zbiór wypłat może wyglądać następująco: $a_{2,1}^1, a_{3,1}^2, a_{5,1}^3, \dots, a_{1,1}^P$.

Tabela 1.3. Macierze wypłat (gra z naturą) – wspólne scenariusze*

Stan natury	Kryterium K_1			Kryterium K_k			Kryterium K_P		
	Decydent			Decydent			Decydent		
	A_1	A_j	A_n	A_1	A_j	A_n	A_1	A_j	A_n
S_1	$a_{1,1}^1$	$a_{1,j}^1$	$a_{1,n}^1$	$a_{1,1}^k$	$a_{1,j}^k$	$a_{1,n}^k$	$a_{1,1}^P$	$a_{1,j}^P$	$a_{1,n}^P$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
S_i	$a_{i,1}^1$	$a_{i,j}^1$	$a_{i,n}^1$	$a_{i,1}^k$	$a_{i,j}^k$	$a_{i,n}^k$	$a_{i,1}^P$	$a_{i,j}^P$	$a_{i,n}^P$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
S_m	$a_{m,1}^1$	$a_{m,j}^1$	$a_{m,n}^1$	$a_{m,1}^k$	$a_{m,j}^k$	$a_{m,n}^k$	$a_{m,1}^P$	$a_{m,j}^P$	$a_{m,n}^P$

* W tabeli świadomie pominięto kolumny dla pozostałych decyzji i kryteriów, gdyż na ich uwzględnienie nie pozwalają rozmiary strony.

Objaśnienia: n – liczba wariantów decyzyjnych decydenta A ; m – liczba scenariuszy (stanów natury) S ; P – liczba kryteriów K ; $a_{i,j}^k$ – realizacja kryterium K_k w przypadku wyboru decyzji A_j i zajścia scenariusza S_i .

Szczegółową analizę problemów jednokryterialnych i reguł decyzyjnych dla tychże problemów przeprowadzono w rozdziale 2, natomiast wielokryterialnego podejścia decyzyjnego dotyczy rozdział 3.

tylko uwzględniają preferencje decydenta, ale również biorą pod uwagę ewentualne asymetryczne rozkłady wypłat. Reguła H+B (podrozdział 2.3.1) odwołuje się do zasad Hurwicza i Bayesa – adresowana jest do decydentów pragnących uwzględnić wszystkie wyniki dotyczące poszczególnych wariantów decyzyjnych. Pozostałe dwie reguły: APO (podrozdział 2.3.2) i SAPO (podrozdział 2.3.3) kierowane są do decydentów zamierzających się skupić na dwóch zbiorach: zbiorze najwyższych wypłat i zbiorze najniższych wypłat. Regułę APO opracowano z myślą o decydentach pasywnych, natomiast koncepcja SAPO powinna zainteresować decydentów aktywnych. We wszystkich trzech procedurach zakładamy, że macierz wypłat jest już oszacowana przez ekspertów.

2.3.1. Reguła H+B

Autorską regułę H+B po raz pierwszy opisała Gaspars-Wieloch (2014d), a przykłady zastosowań tejże procedury znajdziemy w innych pracach autorki (Gaspars-Wieloch, 2015b, 2015c, 2016a, 2017e, 2017f, 2017g; Gaspars-Wieloch i Michalska, 2016). Poniżej zamieszczono opis algorytmu dla reguły H+B.

Algorytm dla reguły H+B

Krok 1. Ustalamy wartość współczynnika pesymizmu α podmiotu dla danej sytuacji decyzyjnej.

Krok 2. Dla każdej decyzji A_j wyznaczamy nierosnący ciąg wypłat Sq_j :

$$Sq_j = (a_{1,j}, \dots, a_{s,j}, \dots, a_{m,j}), \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.34)$$

gdzie:

m – liczba scenariuszy,

s – numer wyrazu tego ciągu,

$a_{s,j} \geq a_{s+1,j}$ ($s = 1, 2, \dots, m-1$),

$a_{1,j} = m_j$, $a_{m,j} = w_j$, przy czym m_j i w_j to nadal odpowiednio najwyższa i najniższa wypłata związana z decyzją A_j .

Krok 3. Dla każdej decyzji obliczamy wskaźnik hb_j (tj. hb_j^p , hb_j^o lub $hb_j^{0,5}$, w zależności od wartości parametru α).

1) Jeżeli $\alpha \in]0,5, 1]$, obliczamy wskaźnik hb_j^p zgodnie ze wzorem:

$$hb_j^p = \frac{\alpha_p \cdot a_{m,j} + \beta_p \cdot \sum_{s=1}^{m-1} a_{s,j}}{(m-1)(1-\alpha_p) + \alpha_p}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.35)$$

gdzie α_p i β_p to odpowiednio współczynnik pesymizmu i współczynnik optymizmu dla decydenta pesymisty.

2) Jeżeli $\alpha \in [0, 0,5[$, obliczamy wskaźnik hb_j^o zgodnie ze wzorem:

$$hb_j^o = \frac{\alpha_o \cdot \sum_{s=2}^m a_{s,j} + \beta_o \cdot a_{1j}}{(m-1) \cdot \alpha_o + 1 - \alpha_o}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.36)$$

gdzie α_o i β_o to odpowiednio współczynnik pesymizmu i współczynnik optymizmu dla decydenta optymisty.

3) Jeżeli $\alpha = 0,5$, dla każdej decyzji obliczamy wskaźnik $hb_j^{0,5}$, korzystając ze wzoru:

$$hb_j^{0,5} = hb_j^p = hb_j^o = b_j \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.37)$$

gdzie b_j to wskaźnik Bayesa wyznaczany zgodnie z formułą (2.7).

Jak widać, w tym wypadku nie ma znaczenia, która zależność zostanie zastosowana (hb_j^p czy hb_j^o), ponieważ oba wzory prowadzą do uzyskania tych samych wartości. Są one równe wskaźnikom Bayesa, gdyż wagi dla wszystkich wypłat są identyczne.

Krok 4. Wybieramy tę strategię, która spełnia warunek:

$$hb_{j*} = \max_j \{hb_j\}. \quad (2.38)$$

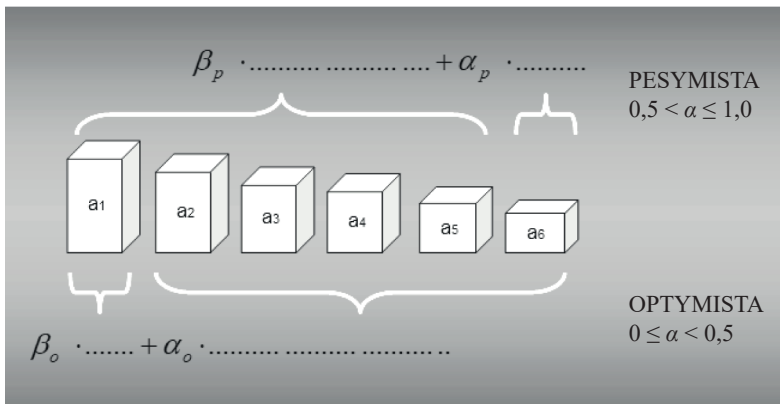
Reguła H+B jest w swej konstrukcji dość prosta, jednak jej idea wymaga wyjaśnienia. Łatwo można w niej dostrzec elementy charakterystyczne dla zasady Hurwicza i zasady Bayesa. Z pierwszą procedurą łączy ją możliwość określenia poziomu współczynnika ostrożności, czyli zadeklarowania swojego nastawienia do ryzyka, oraz konieczność wyznaczenia pewnej średniej ważonej. Z drugą procedurą łączy ją ustalenie końcowego wskaźnika na podstawie wszystkich wyników, nie tylko skrajnych³³.

Przejdźmy teraz do przeanalizowania kroku 3, tj. zasadniczego etapu całej procedury. Z zależności (2.35)-(2.37) wynika, że w wypadku pesymisty należy przemnożyć współczynnik pesymizmu przez ostatni wyraz ciągu Sq_j , który jest równy najniższej wypłacie, a współczynnik optymizmu przez wszystkie pozostałe wyrazy tego ciągu, czyli przez $(m - 1)$ najwyższych wyrazów. Natomiast w wypadku

³³ W regule H+B widoczne są też cechy metody WOVA (*Weighted Ordered Weighted Averaging*), czyli przypisywanie różnych wag poszczególnym scenariuszom (Ogryczak i Śliwiński, 2009).

optymisty konieczne jest przemnożenie współczynnika optymizmu przez pierwszy wyraz ciągu Sq_j , który jest równy najwyższej wypłacie, a współczynnika ostrożności przez $(m - 1)$ najniższych wyrazów tego ciągu. Powyższe objaśnienia ilustruje dodatkowo rysunek 2.1.

Aby obliczone wskaźniki hb_j mieściły się w przedziale $[w_j, m_j]$, wspomniane sumy odpowiednio zważonych wypłat są na koniec dzielone przez sumę wszystkich wykorzystanych wag. Zabieg ten nie jest jednak kluczowy, a brak mianownika we wzorach (2.35)-(2.37) nie wpłynąłby na ranking wariantów decyzyjnych. Dla pesymisty stosujemy raz parametr α i $(m - 1)$ razy parametr β . Dla optymisty korzystamy raz ze współczynnika β i $(m - 1)$ razy ze współczynnika α . Każdorazowe uwzględnienie wszystkich wypłat pozwala nam z pewnością zawrzeć we wskaźniku hb_j informację o częstotliwości poszczególnych wyników (zarówno skrajnych, jak i pośrednich).



Rysunek 2.1. Ważenie wypłat w regule H+B

Źródło: Gaspars-Wieloch, 2014d.

Zauważmy, że w całym wzorze (2.35) największą wagę będzie miał ostatni wyraz ciągu, gdyż dla pesymisty $\alpha \in]0,5, 1]$ (i jest to oczywiście logiczne), zatem pozostałe wypłaty (tj. $(m - 1)$ najwyższych wyrazów ciągu) będą potraktowane tym bardziej marginalnie, im wyższy będzie współczynnik pesymizmu: $\beta \in [0, 0,5[$, lecz im wyższą wartość będą miały te wypłaty i im więcej takich wypłat będzie, tym wyższy będzie wskaźnik hb_j^p . Dzięki temu, że – w przeciwieństwie do wskaźnika Hurwicza – współczynnik optymizmu w formule (2.35) jest przyporządkowany wszystkim wyrazom nierosnącego ciągu wypłat poza ostatnim, pesymiście zarekomendowana zostanie ta strategia, której minimalna wypłata jest względnie najwyższa lub której najwyższe wypłaty występują stosunkowo często – taki bowiem rozkład jest preferowany przez pesymistów, gdyż daje on im poczucie bez-

pieczeństwa. Znaczenie $(m - 1)$ najwyższych wyrazów ciągu zależy oczywiście od poziomu współczynnika pesymizmu. Dla skrajnego pesymisty tylko ostatni wyraz ciągu będzie odgrywać istotną rolę, a reszta wypłat nie będzie się liczyć prawie wcale; $(m - 1)$ najwyższych wyrazów ciągu będzie przybierać na znaczeniu tym bardziej, im bardziej umiarkowany będzie pesymizm decydenta.

Analogicznie, we wzorze (2.36) największe znaczenie ma pierwszy wyraz ciągu, gdyż dla optymisty $\beta \in]0,5, 1]$ (co również jest zrozumiałe), natomiast reszta wypłat (czyli $(m - 1)$ najniższych wyrazów ciągu) jest uwzględniana tym bardziej symbolicznie, im wyższy jest współczynnik optymizmu: $\alpha \in [0, 0,5[$. Jednakże im wyższą wartość będą miały te wyniki i im więcej takich wypłat będzie, tym wyższy będzie wskaźnik hb_j^o . Dzięki temu, że współczynnik pesymizmu we wzorze (2.36) jest, w przeciwieństwie do wskaźnika Hurwicza, przyporządkowany wszystkim wyrazom nierosnącego ciągu wypłat, z wyjątkiem pierwszego, optymiście zostanie zarekomendowana ta strategia, której maksymalna wypłata jest względnie najwyższa lub której pozostałe wypłaty są często wysokie – taki bowiem rozkład jest bardzo atrakcyjny dla optymistów. Wszystko będzie jednak zależało od poziomu współczynnika optymizmu. W wypadku skrajnego optymisty tylko pierwszy wyraz ciągu będzie miał istotne znaczenie, a pozostałe wypłaty będą miały znikomy wpływ na ranking wariantów – taki optymista liczy na to, że będzie miał szczęście i że wystąpi akurat najlepszy scenariusz dla wybranej decyzji. Waga $(m - 1)$ najniższych wyrazów ciągu będzie natomiast coraz wyższa – tym bardziej, im bardziej umiarkowany będzie optymizm decydenta; w tym wypadku optymista nie jest już taki pewien wystąpienia najkorzystniejszego wyniku, poszukuje więc wariantu z dość licznymi wysokimi wypłatami pośrednimi.

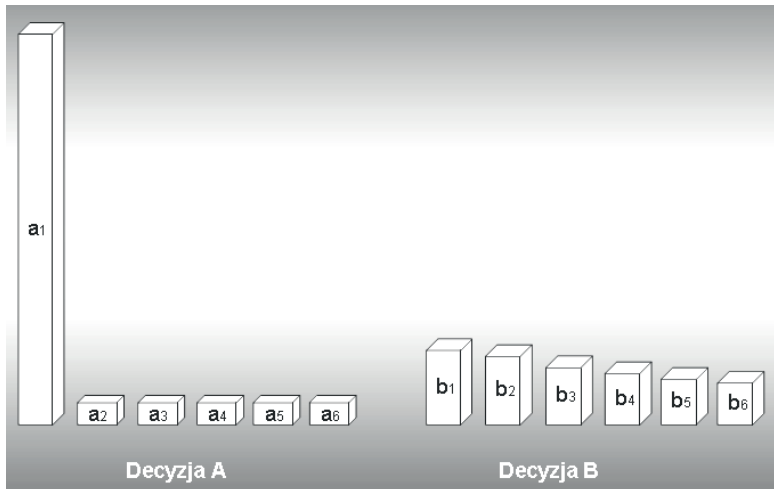
Z konstrukcji proponowanych wzorów (2.35) i (2.36) wynika, że we wskaźnikach ustalanych dla pesymisty wraz ze wzrostem liczby stanów natury maleje znaczenie minimalnej wypłaty i rośnie znaczenie sumy $(m - 1)$ najwyższych wypłat, a we wskaźnikach obliczanych dla optymisty maleje znaczenie maksymalnej wypłaty i rośnie znaczenie sumy $(m - 1)$ najniższych wypłat. Zależność ta nie występuje w pierwotnej wersji reguły Hurwicza, gdzie niezależnie od liczby scenariuszy ważne są tylko dwie wypłaty: maksymalna i minimalna. Zaobserwowana cecha reguły H+B jest natomiast charakterystyczna dla zasady Bayesa, zgodnie z którą szansa wystąpienia danego scenariusza maleje tym bardziej, im stanów jest więcej (Gaspars-Wieloch, 2014d).

Dla współczynników α oscylujących wokół wartości 0,5 prezentowana zasada proponuje takie same rankingi jak rankingi generowane za pomocą reguły Bayesa, co jest zrozumiałe, gdyż podobnie ważone są wszystkie wypłaty.

- Reguła H+B, w odróżnieniu od zasady Hurwicza, daje więc następujące korzyści:
- dla umiarkowanego pesymisty: im więcej jest stanów, tym wyższy wskaźnik otrzyma wariant decyzyjny, dla którego większość scenariuszy oferuje

- wypłaty bliskie wartości maksymalnej związanej z tym wariantem (jest to pewna forma zabezpieczenia dla pesymisty);
- dla umiarkowanego optymisty: im więcej jest scenariuszy, tym mniejszy wskaźnik otrzyma wariant decyzyjny, dla którego większość stanów oferuje wypłaty bliskie wartości minimalnej związanej z tym wariantem (dzięki temu optymiście zarekomendowana zostanie strategia, której najwyższe wypłaty są znacznie wyższe od najwyższych wypłat innych strategii) (Gaspars-Wieloch, 2014d).

W cytowanej pracy znajdziemy opis jeszcze jednej zalety reguły H+B. Otóż ważenie wszystkich wyników, a nie tylko skrajnych wartości, daje istotną przewagę tejszy zasady nad regułą Hurwicza wówczas, gdy decydent ma do wyboru dwie decyzje (A i B) o zbiorach wypłat przedstawionych na rysunku 2.2 (przykład 21). Opcja A charakteryzuje się jedną bardzo wysoką wypłatą (kilkakrotnie przewyższającą maksymalną wypłatę związaną z decyzją B), natomiast pozostałe jej wypłaty są kilkakrotnie niższe od minimalnej wypłaty wariantu B). Z kolei wyniki decyzji B są dość wyrównane i, poza jednym scenariuszem, wyższe od wypłat opcji A .



Rysunek 2.2. Zbiór wypłat dla decyzji A i B (przykład 21)

Źródło: Gaspars-Wieloch, 2014d.

Decydent o nastawieniu skrajnie pesymistycznym (parametr α równy jedności) będzie zainteresowany realizacją strategii B , której minimalna wypłata jest względnie wyższa, i tak też się dzieje w przypadku zastosowania obu procedur. Problem pojawia się, gdy podmiot nie jest skrajnym pesymistą bądź też jest po

prostu umiarkowanym decydem. Omawiane reguły zaproponują decydemowi strategię A dopiero wtedy, gdy maksymalna wypłata tej decyzji spełni odpowiednio warunek (2.39) lub (2.40):

$$\begin{aligned} (1-\alpha) \cdot a_1 + \alpha \cdot a_6 &> (1-\alpha) \cdot b_1 + \alpha \cdot b_6 \Rightarrow \\ \Rightarrow a_1 &> \frac{(1-\alpha) \cdot b_1 + \alpha \cdot (b_6 - a_6)}{1-\alpha} \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{(1-\alpha) \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + \alpha \cdot a_6}{5 \cdot (1-\alpha) + \alpha} &> \\ \frac{(1-\alpha) \cdot (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5) + \alpha \cdot b_6}{5 \cdot (1-\alpha) + \alpha} &\Rightarrow \\ a_1 &> \frac{(1-\alpha) \cdot (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5) + \alpha \cdot (b_6 - a_6)}{1-\alpha} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Jak widać, minimalny poziom wypłaty a_1 dla reguły Hurwicza jest znacznie niższy od minimalnego poziomu tego wyniku dla zasady H+B (w liczniku we wzorze (2.40) występują ze znakiem dodatnim wszystkie wypłaty decyzji B , a nie tylko skrajne wartości). Zatem klasyczna reguła Hurwicza sugeruje pesydemom decyzje o rzadkich wysokich wypłatach przy stosunkowo małej przewadze maksymalnej wypłaty nad maksymalnymi wypłatami innych strategii. Takie decyzje wcale nie charakteryzują się bezpiecznymi rozkładami wypłat (Gaspars-Wieloch, 2014d).

Konkludując, należy stwierdzić, że metoda H+B, dzięki uwzględnieniu specyfiki całego zbioru wypłat, może znacząco się przyczynić do zredukowania negatywnych skutków asymetryczności rozkładów charakterystycznych dla oryginalnej reguły Hurwicza. Jej stosowanie pozwoli otrzymać logiczne odpowiedzi dla szerszego spektrum problemów decyzyjnych. Do analizy wartości pośrednich dotyczących poszczególnych opcji zachęcają także Perez i współautorzy (2015).

Na koniec tego podrozdziału zaprezentujemy krótki przykład ilustrujący ideę reguły H+B. Odwołamy się do danych z tabeli 2.32 (przykład 22). Warto podkreślić, że celowo rozpatrujemy sytuację, w której rozkłady wypłat są asymetryczne. W przypadku pierwszej decyzji dominują wypłaty bliższe wypłatom minimalnej, z kolei dla pozostałych dwóch decyzji zauważalna jest przewaga wyników bliskich wartości maksymalnych.

Krok 1 reguły H+B pominiemy, ponieważ tworzymy ranking decyzji dla różnych wartości parametru α . W kroku 2 generujemy nierosnące ciągi wypłat: $Sq_1 = (10, 3, 2, 0, -1)$, $Sq_2 = (8, 7, 7, 6, 0)$, $Sq_3 = (7, 6, 6, 3, 1)$. W kroku 3 wyznaczamy wartość wskaźnika hb_j . Tabela 2.33 zawiera dokładne obliczenia dla $\alpha = 0,3$ (umiarkowany optymista) i dla $\alpha = 0,7$ (umiarkowany pesydemista). Dla pozostałych poziomów

Sposób, w jaki należy korzystać z reguły APO(norm), zaprezentujemy, korzystając z danych przykładu 22. Krok 1 pomijamy, gdyż będziemy rozpatrywać różne typy decydentów. Tabela 2.53 zawiera obliczone wartości wskaźników normalizacji (krok 2).

Tabela 2.53. Przykład 22 – macierz wypłat i wskaźników normalizacji ($N_{i,j}$) (reguła APO(norm))

Stan	Decyzja					
	Wypłaty			Wskaźniki normalizacji		
	A_1	A_2	A_3	A_1	A_2	A_3
S_1	2	8	3	0,00	1,00	0,17
S_2	-1	0	7	0,00	0,13	1,00
S_3	0	7	6	0,00	1,00	0,86
S_4	10	7	1	1,00	0,67	0,00
S_5	3	6	6	0,00	1,00	1,00

Dalszych kroków nie omawiamy szczegółowo, ponieważ sama procedura APO została już dokładnie przedstawiona w podrozdziale 2.3.2. W tabeli 2.54 ujęto zestawienie wyników dla różnych poziomów współczynnika pesymizmu. Takich rankingów nie wygenerowano jeszcze za pomocą jakiegokolwiek dotychczas prezentowanej reguły. Są one zupełnie inne, lecz logiczne z punktu widzenia wstępnie przyjętych założeń. W wypadku skrajnego optymizmu rzeczywiście druga decyzja jest warta zarekomendowania, gdyż osiąga ona najczęściej wskaźniki normalizacji równe jedności. Ten wariant jest również najlepszy dla umiarkowanych decydentów, dla których istotna jest średnia pozycja danej decyzji. Wreszcie okazuje się, że opcja A_2 jest też najwłaściwszym rozwiązaniem dla skrajnego pesymisty, który unika decyzji charakteryzujących się częstymi zerowymi wskaźnikami normalizacji. W tabeli 2.54 ujęto dodatkowo w nawias te wartości wskaźnika $H(N)_j^I$, które są tylko minimalnie niższe od maksymalnych wartości. W kroku 7b badano więc także, dla niskiego poziomu współczynnika ostrożności, atrakcyjność wariantów A_1 i A_3 . Nie zostały one jednak ostatecznie wybrane z powodu mniejszej liczby jedynkowych wskaźników normalizacji.

Przypomnijmy, że w podrozdziale 2.5.2 analizowano także przykład 26 łudząco podobny do przykładu 22 – przedstawione zostały jedynie dwie wypłaty dotyczące decyzji A_2 . Powróćmy na chwilę do niego, by sprawdzić, jak owa zmiana struktury macierzy wypłat wpłynie na końcowe rankingi uzyskane z wykorzystaniem reguły APO(norm) (tabele 2.55-2.56).

Tabela 2.54. Przykład 22 – wskaźniki $H(N)_j^I$ dla $\alpha \in [0, 1]$ (reguła APO(norm))

Współczynnik pesymizmu	Decyzja		
	A_1	A_2	A_3
0,00	(1,00)	1,00	(1,00)
0,05	(0,95)	0,96	(0,95)
0,10	(0,90)	0,91	(0,90)
0,15	(0,85)	0,87	(0,85)
0,20	0,80	0,83	0,80
0,25	0,38	0,85	0,77
0,30	0,35	0,82	0,73
0,35	0,33	0,79	0,68
0,40	0,30	0,76	0,63
0,45	0,18	0,82	0,68
0,50	0,17	0,80	0,65
0,55	0,15	0,78	0,62
0,60	0,20	0,64	0,45
0,65	0,18	0,61	0,40
0,70	0,15	0,58	0,36
0,75	0,13	0,55	0,31
0,80	0,20	0,30	0,20
0,85	0,15	0,26	0,15
0,90	0,10	0,21	0,10
0,95	0,05	0,17	0,05
1,00	0,00	0,13	0,00

Dla skrajnego optymisty nic się nie zmienia. Przy wzroście współczynnika pesymizmu coraz większego znaczenia nabiera średnia pozycja wypłat (cel ten najlepiej jest realizowany przez wariant A_2), a przy bardzo wysokich wartościach tego parametru zasadnicza kwestia to minimalizacja liczby lokalnie najgorszych wypłat (to kryterium najlepiej realizuje wariant A_3). W przykładzie 26 zastosowanie kroku 7b przyczyniło się do korekty ostatecznych wyborów w przypadku $\alpha \in [0,05, 0,20]$. Choć dla tego poziomu współczynnika pesymizmu wyższe wartości wskaźnika $H(N)_j^I$ osiąga ostatnia decyzja, w końcowej fazie procedury rekomendowana jest opcja druga, gdyż osiąga one najwyższe wypłaty aż dla czterech stanów natury.

Tabela 2.55. Przykład 26 – macierz wypłat i wskaźników normalizacji ($N_{i,j}$) – (reguła APO(norm))

Stan	Decyzja					
	Wypłaty			Wskaźniki normalizacji		
	A_1	A_2	A_3	A_1	A_2	A_3
S_1	2	8	3	0,00	1,00	0,17
S_2	-1	7	7	0,00	1,00	1,00
S_3	0	7	6	0,00	1,00	0,86
S_4	10	0	1	1,00	0,00	0,10
S_5	3	6	6	0,00	1,00	1,00

Tabela 2.56. Przykład 26 – wskaźniki $H(N)_j^I$ dla $\alpha \in [0, 1]$ (reguła APO(norm))

Współczynnik pesymizmu	Decyzja		
	A_1	A_2	A_3
0,00	(1,00)	1,00	(1,00)
0,05	(0,95)	0,95	(0,96)
0,10	(0,90)	0,90	(0,91)
0,15	(0,85)	0,85	(0,87)
0,20	(0,80)	0,80	(0,82)
0,25	0,38	0,88	0,78
0,30	0,35	0,85	0,74
0,35	0,33	0,83	0,70
0,40	0,30	0,80	0,65
0,45	0,18	0,85	0,69
0,50	0,17	0,83	0,66
0,55	0,15	0,82	0,63
0,60	0,20	0,70	0,48
0,65	0,18	0,68	0,44
0,70	0,15	0,65	0,39
0,75	0,13	0,63	0,35
0,80	0,20	0,20	0,28
0,85	0,15	0,15	0,24
0,90	0,10	0,10	0,19
0,95	0,05	0,05	0,15
1,00	0,00	0,00	0,10

Na koniec warto podkreślić, że zastąpienie sum względnych zysków (stosowanych w regule CMJ i hybrydzie na niej opartej) wskaźnikami normalizacji pozwala analizować także problemy decyzyjne charakteryzujące się bardziej zróżnicowanymi rozstępami wypłat. Obserwacja ta zostanie poparta analizą przykładu 24 (tabela 2.45), w którym to rozstęp wypłat decyzji A_1 jest znacznie większy aniżeli rozstępy wypłat pozostałych wariantów decyzyjnych.

Jak widać (tabela 2.57), przy stosowaniu reguły APO(norm) bardzo ryzykowny wariant A_1 , który zdobył pierwsze miejsce w rankingu wygenerowanym za pomocą metody CMJ, nie zostanie zarekomendowany skrajnemu pesymiście. Przy $\alpha = 1$ reguła APO(norm) zaproponuje decyzję A_3 , która, niezależnie od zaistniałego stanu natury, zawsze przynosi zyski.

Tabela 2.57. Przykład 24 – wskaźniki normalizacji ($N_{i,j}$) (reguła APO(norm))

Stan	Decyzja				
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
S_1	1,000	0,005	0,007	0,002	0,000
S_2	0,000	0,977	1,000	0,977	0,991
S_3	0,000	0,963	1,000	0,977	0,963
S_4	0,000	0,967	0,981	1,000	0,967
S_5	0,000	0,972	0,967	0,986	1,000

2.5.4. Hybrydy uwzględniające punkty referencyjne i współczynnik pesymizmu

Kolejny sposób uwzględnienia struktury macierzy wypłat i nastawienia decydenta do danego problemu decyzyjnego może polegać na zastosowaniu punktu referencyjnego. Proponujemy jednak użyć tego narzędzia zupełnie inaczej aniżeli dotychczas. W literaturze znane są metody, w których wszystkie wypłaty ulegają przekształceniu na podstawie jednego, wspólnego punktu referencyjnego (Gaspars-Wieloch, 2015c; Gaspars-Wieloch i Michalska, 2016; Kahneman i Tversky, 1979; Kopańska-Bródka i Dudzińska-Baryła, 2008; Michalska, 2015; Michalska i Dudzińska-Baryła, 2015; Tversky i Kahneman, 1992). Tutaj z kolei zalecane jest przyjęcie odrębnych punktów referencyjnych dla każdego scenariusza. Uzasadnienie takiego postępowania jest następujące. W wypadku zajścia bardzo optymistycznego scenariusza dana wygrana związana z konkretną decyzją jest znacznie mniejszym „osiągnięciem” aniżeli uzyskanie tej samej wypłaty w ramach bardziej pesymistycznego scenariusza. Stąd poprzeczka w postaci punktu referencyjnego

może być ustawiona wyżej dla optymistycznych stanów natury i odpowiednio (tj. według uznania decydenta) niżej dla gorszych scenariuszy. Propozycję zastosowania punktów referencyjnych w taki właśnie sposób po raz pierwszy opisała Gaspars-Wieloch (2018). Punkty referencyjne mogą wzbogacić dowolną metodę opisaną w podrozdziale 2.3. Tu przykładowo podajemy kroki dla reguły H+B(ref), choć ze względu na wiele analogii poszczególne kroki nie będą już szczegółowo prezentowane.

Algorytm dla reguły H+B(ref)

Krok 1. Określamy współczynnik pesymizmu α decydenta.

Krok 2. Dla każdego stanu natury wyznaczamy punkty referencyjne r_i oraz ustalamy względne wypłaty $a'_{i,j}$ zgodnie ze wzorem:

$$a'_{i,j} = a_{i,j} - r_i, \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n. \quad (2.130)$$

Kroki 3-5. Wykonujemy kroki 2-4 reguły decyzyjnej H+B (podrozdział 2.3.1) dla macierzy względnych wypłat. Stosujemy odpowiednio inne oznaczenia: Sq_j^r , $a'_{s,j}$, m_j^r i w_j^r , $hb(r)_j$, $hb(r)_j^p$, $hb(r)_j^o$, $hb(r)_j^{0,5}$, $b(r)_j$, $hb(r)_j^*$.

Regułę H+B(ref) omówimy, korzystając z przykładu 27 (tabela 2.58). W przeciwieństwie do przykładu 22, będącego materiałem ilustracyjnym dla prawie wszystkich autorskich reguł opisanych w poprzednich podrozdziałach rozdziału 2, przykład 27 charakteryzuje się bardzo zróżnicowanymi zakresami wypłat, w zależności od badanego scenariusza. Stan S_1 jest wyraźnie najlepszy (wszystkie jego wypłaty przekraczają wyniki występujące w pozostałych stanach), natomiast stan

Tabela 2.58. Przykład 27 – macierz wypłat oraz względnych zysków i strat ($a'_{i,j}$) – (reguła H+B(ref))

Stan	Decyzja					
	Wypłaty			Wskaźniki normalizacji		
	A_1	A_2	A_3	A_1	A_2	A_3
S_1	18	12	13	3	-3	-2
S_2	-1	-3	4	-4	-6	1
S_3	0	8	6	-6	2	0
S_4	10	5	1	4	-1	-5
S_5	4	10	9	-2	4	3

Rozdział 4

ZASTOSOWANIA EKONOMICZNE PROPONOWANYCH REGUŁ DECYZYJNYCH

4.1. Wprowadzenie

W rozdziale czwartym pokazano, w jaki sposób autorskie reguły decyzyjne proponowane w rozprawie można wykorzystać do rozwiązania wybranych ekonomicznych problemów decyzyjnych, choć dane we wszystkich analizowanych przykładach są fikcyjne. W poszczególnych podrozdziałach nacisk położono na zaprezentowanie danych zadania optymalizacyjnego, na adaptację wybranej reguły decyzyjnej do danego zagadnienia i na uzyskane wyniki końcowe. Nie wyjaśniono natomiast w każdej sytuacji bardzo szczegółowo wszystkich kroków zastosowanej procedury, ponieważ już w poprzednich rozdziałach pracy starano się te kwestie przedstawić. Uwagę skupiono na aspektach dotychczas nieomówionych. W razie jakichkolwiek wątpliwości Czytelnik będzie mógł w wielu wypadkach skorzystać z podanego przez autorkę materiału źródłowego, w którym dany przykład omówiono dokładniej.

4.2. Ocena efektywności projektów innowacyjnych na podstawie wskaźnika Omega(H+B)

Projekty można oceniać na wiele sposobów. Jednym z nich jest wskaźnik Omega zaproponowany przez Keatinga i Shadwicka (2002a, 2002b). Służy on do pomiaru efektywności funduszy, portfeli i strategii inwestycyjnych. Konstrukcja wskaźnika jest następująca. Po wyznaczeniu różnic pomiędzy poszczególnymi oczekiwanymi wynikami związanymi z daną inwestycją a pewnym punktem odniesienia (*point of reference*), otrzymane rezultaty dzielone są na dwie kategorie. W liczniku ilorazu

reprezentującego wskaźnik Omega ujęte są oczekiwane zyski, tj. różnice dodatnie, z kolei mianownik obejmuje wszystkie oczekiwane straty, czyli różnice ujemne, lecz przedstawione jako wartości bezwzględne. W ilorazie nie są więc uwzględnione zerowe różnice, tj. sytuacje, w których dany oczekiwany wynik jest równy punktowi referencyjnemu. Zaletą wskaźnika Omega jest brak jakichkolwiek wymogów dotyczących specyfiki rozkładu wypłat związanych z ocenianą decyzją (rozkład może być nawet skrajnie asymetryczny) i możliwość odzwierciedlenia pełnej informacji o badanym rozkładzie (Pichura, 2013). Punkt referencyjny jest ustalany umownie przez decydenta. Mogą nim być na przykład akceptowany poziom bogactwa, stopa zwrotu wolna od ryzyka czy też indeks giełdowy. Wartość punktu referencyjnego ma bardzo istotny wpływ na wybór ostatecznej decyzji (Vilkancas, 2014). Wzór umożliwiający wyznaczenie wskaźnika podano poniżej (wersja ciągła):

$$\Omega(r) = \frac{\int_a^b (1 - F(x)) dx}{\int_a^r F(x) dx}, \quad (4.1)$$

gdzie:

- $[a, b]$ – przedział oczekiwanych wypłat,
- $F(x)$ – funkcja dystrybuanty rozkładu,
- r – punkt referencyjny.

Wskaźnik Omega można jednak prezentować za pomocą różnych wzorów (Bargman, 2012; Kaplan i Knowles, 2004; Michalska, 2015), a wybór formuły odpowiedniej dla danej sytuacji zależy głównie od tego, czy mamy do czynienia z dyskretnym, czy z ciągłym rozkładem wypłat.

Projekt jest tym bardziej efektywny, im wyższa jest wartość wskaźnika Omega. Przyjmuje on wartość 1, gdy r stanowi średnią wypłatę.

W polskiej literaturze wskaźnik Omega jest uznawany za „miarę efektywności” (Domański, 2011; Karpio i Żebrowska-Suchodolska, 2015; Kopańska-Bródka, Dudzińska-Baryła i Michalska, 2016; Michalska i Dudzińska-Baryła, 2015; Michalska, 2015, 2017; Pichura, 2013), z kolei w literaturze anglojęzycznej określany jest jako *performance measure*. Angielski termin *performance* może być tłumaczony na język polski na wiele sposobów (efektywność, rentowność, opłacalność, wydajność, wykonanie, realizacja itd.). W związku z tym trudno mieć pewność, że twórcom wskaźnika Omega chodziło właśnie o efektywność, tym bardziej że pojęcie efektywności też ma wiele definicji (Grzesiak, 1997b; Ziębicki, 2013). W naukach ekonomicznych efektywność może być rozpatrywana jako efektywność ekonomiczna (według teorii ekonomii) lub jako efektywność organizacyjna (według teorii

zarządzania). Pamiętając, że wskaźnik Omega jest stosunkiem oczekiwanych zysków do oczekiwanych strat, w niniejszej monografii mamy oczywiście na myśli efektywność ekonomiczną, która wiąże się z uzyskiwaniem jak najwyższego wyniku (efektu) przy jak najniższych nakładach.

Istotną cechą wskaźnika Omega jest to, że został on opracowany dla decyzji podejmowanych, według teorii ekonomii, w warunkach niepewności ze znanymi prawdopodobieństwami, czyli – stosując nazewnictwo zaczerpnięte z teorii decyzji – dla decyzji podejmowanych w warunkach ryzyka (DMR). Taka miara nie jest zatem bezpośrednio przedmiotem naszych zainteresowań, gdyż w monografii skupiamy się na problemach decyzyjnych, w których oszacowanie rozkładu prawdopodobieństwa jest bardzo trudne. W tym konkretnym podrozdziale rozważamy wypadek projektów innowacyjnych, charakteryzujących się dużym stopniem niepewności ze względu na obecność wielu nowych czynników, dotychczas niezbadanych.

Wspominamy jednak o wskaźniku Omega, ponieważ ta miara doczekała się licznych rozszerzeń i modyfikacji (Bargman, 2012; Gaspars-Wieloch, 2015c; Gaspars-Wieloch i Michalska, 2016, P.D. Kaplan i Knowles, 2004; Kapsos, Zymler, Christofides i Rustem, 2014; Kazemi, Schneeweis i Gupta 2004; Michalska, 2015). Niektóre z nich (Kapsos i in., 2014; Michalska, 2015) przeznaczone są do oceny projektów w warunkach niepełnej informacji (DMPI, podrozdział 1.2.1), czyli w sytuacji, gdy wiedza o prawdopodobieństwie nie jest całkowita.

Jedną z modyfikacji wskaźnika Omega jest też Omega(H+B), czyli propozycja przygotowana przez autorkę niniejszej pracy. Pełny opis tej procedury Czytelnik znajdzie we wcześniejszych pracach autorki (Gaspars-Wieloch, 2015c; Gaspars-Wieloch i Michalska, 2016). Inspiracją do jej opracowania był między innymi artykuł Michalskiej (2015), w którym przedstawiono wskaźnik $\max\Omega_{\min}$ dla DMPI.

Wskaźnik Omega(H+B) opiera się na trzech kryteriach: (1) ilorazie (tj. stosunku zysków do strat); (2) różnicy między zyskami i stratami oraz (3) maksymalizacji zysków bądź minimalizacji strat. Uwzględnia on nastawienie decydenta do ryzyka (jego przypuszczenia) za pomocą współczynnika pesymizmu i optymizmu oraz wykorzystuje ideę reguły H+B (podrozdział 2.3.1). Oznacza to, że zyski i straty, wyznaczone na podstawie punktu referencyjnego i ujęte odpowiednio w liczniku i mianowniku, są przemnożone przez wagi, których wartości dla poszczególnych względnych wypłat zależą od preferencji decydenta. Dla pesymistów współczynnik pesymizmu przyporządkowany jest najwyższej stracie, a współczynnik optymizmu – wszystkim pozostałym względnym wypłatom. Z kolei dla optymistów współczynnik optymizmu stanowi wagę dla najwyższego zysku, a współczynnik ostrożności wyznaczony jest przez resztę wyników. Taki sposób ustalania wag dla kolejnych wypłat związanych z daną decyzją został szczegółowo opisany i wyjaśniony w podrozdziale 2.3.1.

Zauważmy, że czasami oryginalny wskaźnik Omega opracowany dla sytuacji, w których znany jest rozkład prawdopodobieństwa, nie nadaje się do porównywania strategii inwestycyjnych. Dotyczy to przypadków, w których dla co najmniej jednego wariantu decyzyjnego licznik bądź mianownik ilorazu umożliwiającego wyznaczenie wskaźnika jest równy zero. Może się to zdarzyć, gdy dla danej decyzji nie ma ani jednej wypłaty przekraczającej punkt referencyjny lub brakuje wypłat niższych niż ten punkt. W związku z powyższym mankamentem pierwotnej wersji wskaźnika procedury opierające się na tej mierze, dla decyzji podejmowanych w warunkach niepełnej informacji bądź niepewności z nieznanymi prawdopodobieństwami, zostały tak opracowane, by i w wypadku zerowego licznika lub mianownika dla choć jednej opcji można było ostatecznie zarekomendować jakąś konkretną strategię (Gaspars-Wieloch i Michalska, 2016). Wskaźników $\max\Omega_{\min}$ i $\Omega(H+B)$ używa się więc w następujący sposób. Najpierw należy podzielić zbiór wszystkich rozpatrywanych strategii na trzy grupy: (A) decyzje z zyskami i stratami (występują niezerowe elementy zarówno w liczniku, jak i w mianowniku), (B) decyzje bez strat (mianownik jest zerowy), (C) decyzje bez zysków (licznik jest zerowy). Następnie powyższe miary są stosowane tylko dla wariantów reprezentujących grupę (A). Pozostałe opcje oceniane są tylko z punktu widzenia licznika (B) lub mianownika (C) wspomnianych ilorazów. Na kolejnym etapie wyłaniana jest najlepsza decyzja odrębnie w każdej grupie: (A) o najwyższym ilorazie, (B) o najwyższym liczniku, (C) o najniższym mianowniku, a na ostatnim – spośród zwycięzców w każdej kategorii wybierana jest ta decyzja, dla której różnica pomiędzy licznikiem a mianownikiem jest największa. Jeżeli się okaże, że istnieją co najmniej dwie opcje spełniające ten warunek, zalecane jest dokładne zbadanie wyłonionych wariantów pod względem zysków i strat oraz rozstępu wypłat w celu podjęcia ostatecznej decyzji, przy czym pesymistom zaleca się wybór strategii o najmniejszym mianowniku, a optymistom – wybór strategii o największym liczniku.

Wyboru projektu innowacyjnego w warunkach niepewności na podstawie wskaźnika $\Omega(H+B)$ można więc dokonać, realizując następujące kroki.

Algorytm dla reguły opartej na wskaźniku $\Omega(H+B)$

Krok 1. Ustalamy współczynnik pesymizmu α .

Krok 2. Wyznaczamy punkt referencyjny r .

Krok 3. Przekształcamy pierwotne wypłaty do postaci względnych wypłat zgodnie ze wzorem:

$$a_{i,j}^r = a_{i,j} - r, \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n, \quad (4.1)$$

gdzie $a_{i,j}^r$ to względna wypłata związana z decyzją A_j i scenariuszem S_i .

Krok 4. Dla każdej decyzji generujemy nierosnący ciąg zysków $Sq(G)_j = (g_{1,j}, \dots, g_{u,j}, \dots, g_{x,j})$, gdzie $g_{u,j} \geq g_{u+1,j}$ ($u = 1, \dots, x-1$), i niemalejący ciąg strat $Sq(L)_j = (l_{1,j}, \dots, l_{w,j}, \dots, l_{z,j})$, gdzie $l_{w,j} \leq l_{w+1,j}$ ($w = 1, \dots, z-1$):

$$a_{i,j}^r > 0 \Rightarrow a_{i,j}^r = g_{u,j} \in Sq(G)_j, \quad j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, m, \quad (4.2)$$

$$a_{i,j}^r < 0 \Rightarrow |a_{i,j}^r| = l_{w,j} \in Sq(L)_j, \quad j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, m, \quad (4.3)$$

gdzie $0 \leq x + z \leq m$ (x – liczba zysków, z – liczba strat).

Krok 5. Dla każdej opcji obliczamy licznik N_j (*numerator*) i mianownik Dn_j (*denominator*). Sposób ustalania indeksów dla współczynników pesymizmu i opty-
mizmu wyjaśniono w podrozdziale 2.3.1.

a) Jeżeli $1 < x < m$, $1 \leq z \leq m$ i $\alpha \in [0, 0,5[$:

$$N_j = \beta_o \cdot g_{1,j} + \alpha_o \cdot \sum_{u=2}^x g_{u,j}, \quad Dn_j = \alpha_o \cdot \sum_{w=1}^z l_{w,j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.4)$$

b) Jeżeli $x = 1$, $1 \leq z \leq m$ i $\alpha \in [0, 0,5[$:

$$N_j = \beta_o \cdot g_{1,j}, \quad Dn_j = \alpha_o \cdot \sum_{w=1}^z l_{w,j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.5)$$

c) Jeżeli $x = 0$, $1 \leq z \leq m$ i $\alpha \in [0, 0,5[$:

$$N_j = 0, \quad Dn_j = \beta_o \cdot l_{1,j} + \alpha_o \cdot \sum_{w=2}^z l_{w,j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.6)$$

d) Jeżeli $1 \leq x \leq m$, $z = 0$ i $\alpha \in [0, 0,5[$:

$$N_j = \beta_o \cdot g_{1,j} + \alpha_o \cdot \sum_{u=2}^x g_{u,j}, \quad Dn_j = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.7)$$

e) Jeżeli $1 \leq x < m$, $1 < z < m$ i $\alpha \in]0,5, 1]$:

$$N_j = \beta_p \cdot \sum_{u=1}^x g_{u,j}, \quad Dn_j = \beta_p \cdot \sum_{w=1}^{z-1} l_{w,j} + \alpha_p \cdot l_{z,j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.8)$$

f) Jeżeli $1 \leq x < m, z = 1$ i $\alpha \in]0,5, 1]$:

$$N_j = \beta_p \cdot \sum_{u=1}^x g_{u,j}, \quad Dn_j = \alpha_p \cdot l_{1,j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.9)$$

g) Jeżeli $x = 0, 1 \leq z \leq m$ i $\alpha \in]0,5, 1]$:

$$N_j = 0, \quad Dn_j = \beta_p \cdot \sum_{w=1}^{z-1} l_{w,j} + \alpha_p \cdot l_{z,j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.10)$$

h) Jeżeli $1 \leq x \leq m, z = 0$ i $\alpha \in]0,5, 1]$:

$$N_j = \beta_p \cdot \sum_{u=1}^{x-1} g_{u,j} + \alpha_p \cdot g_{x,j}, \quad Dn_j = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.11)$$

i) Jeżeli $\alpha = 0,5$, stosujemy dowolną parę wzorów spośród formuł (4.4)-(4.11), odpowiednią dla x i z .

Krok 6. Dzielimy decyzje na trzy grupy: A, B i C.

$$(N_j > 0) \wedge (Dn_j > 0) \Rightarrow A_j \in A, \quad (4.12)$$

$$(N_j > 0) \wedge (Dn_j = 0) \Rightarrow A_j \in B, \quad (4.13)$$

$$(N_j > 0) \wedge (Dn_j > 0) \Rightarrow A_j \in C. \quad (4.14)$$

Krok 7. W każdej grupie znajdujemy najlepszy wariant:

$$\Omega(hb)_{j^*}^A = \max_{A_j \in A} \left\{ \frac{N_j}{Dn_j} \right\}, \quad (4.15)$$

$$\Omega(hb)_{j^*}^B = \max_{A_j \in B} \{N_j\}, \quad (4.16)$$

$$\Omega(hb)_{j^*}^C = \min_{A_j \in C} \{Dn_j\}. \quad (4.17)$$

i wyznaczamy zbiór D_1 , tj. zbiór „zwycięzców” z każdej grupy. Jeżeli D_1 jest jednoelementowy, kończymy – element tego zbioru jest optymalną decyzją. W przeciwnym razie przechodzimy do kroku 8.

Krok 8. Wyznaczamy zbiór D_{II} , tj. zbiór opcji spełniających poniższy warunek:

$$A_{j^{**}} = \arg \max_{A_j \in D_I} \{N_j - Dn_j\}. \quad (4.18)$$

Jeżeli zbiór ten nie jest jednoelementowy, przechodzimy do kroku 9. W przeciwnym razie kończymy obliczenia – element zbioru D_{II} jest ostateczną decyzją.

Krok 9. Analizujemy elementy zbioru D_{II} w celu wyboru właściwego wariantu. W razie wątpliwości zaleca się wykonać krok 9a lub 9b, by wyznaczyć zbiór D_{III} .

a. Jeżeli $\alpha \in [0,5, 1]$, znajdujemy wariant spełniający warunek:

$$A_{j^{***}} = \arg \min_{A_j \in D_{II}} \{Dn_j\}. \quad (4.19)$$

b. Jeżeli $\alpha \in [0, 0,5[$, znajdujemy wariant spełniający warunek:

$$A_{j^{***}} = \arg \max_{A_j \in D_{II}} \{N_j\}. \quad (4.20)$$

Gdy wybór nadal nie jest jednoznaczny, wybieramy ostateczną decyzję według własnego uznania spośród opcji należących do zbioru D_{III} .

Przejdźmy teraz do oceny efektywności projektów innowacyjnych opisanych w przykładzie 31, korzystając ze wskaźnika Omega(H+B). Innowacyjność analizowanych projektów wynika z tego, że polegają one na wprowadzeniu produktów zaspokajających potrzeby konsumentów w zupełnie nowy sposób. Przykład zaczerpnięto z artykułu Gaspars-Wieloch i Michalskiej (2016), ale zmieniono w nim jeden parametr (tj. jedną z wypłat dla projektu A_3). Inwestor rozważa możliwość realizacji jednego z czterech innowacyjnych projektów (A_1, A_2, A_3 lub A_4), przy czym przyszłość tychże projektów nie jest dokładnie znana. Wiadomo jednak, że eksperci opracowali pięć różnych scenariuszy. Wypłaty zaprezentowano w tabeli 4.1. Eksperci, ze względu na duży stopień nowości projektów, nie są w stanie określić rozkładu prawdopodobieństwa poszczególnych stanów.

Inwestor ocenia swoje nastawienie do ryzyka jako umiarkowanie pesymistyczne ($\alpha = 0,7$), ponieważ w razie niepowodzenia to on będzie obciążony odpowiedzialnością finansową. Za punkt referencyjny przyjmuje poziom 10 milionów złotych ($r = 10$), co pozwala nam obliczyć względne wypłaty (tabela 4.2).

W tabeli 4.3 podano wartości liczników i mianowników (czyli sumy zważonych zysków i sumy zważonych strat) oraz wskazano na ich podstawie, do której grupy należy dany projekt. W wypadku projektów A_1 i A_2 skorzystano ze wzorów