

Spis treści

Przedmowa	9
1. Preliminaria	13
1.1. Przestrzeń i czasoprzestrzeń w matematyce	13
1.2. Wektory na rozmaitości	15
1.3. Tensory	16
1.4. Przestrzenie \mathbf{R}^n i \mathbf{E}^n	17
1.4.1. Afiniczna przestrzeń euklidesowa \mathbf{E}^n	21
1.5. Odwzorowania przestrzeni \mathbf{R}^n	24
1.6. Transformacje współrzędnych	29
1.6.1. Współrzędne biegunowe na płaszczyźnie	33
1.7. Wymiar przestrzeni	35
1.8. Notacja	37
2. Rozmaitości różniczkowe	39
2.1. Wprowadzenie	39
2.2. Definicja rozmaitości różniczkowej	41
2.2.1. Rozmaitość	49
2.3. Przykłady rozmaitości gładkich	52
2.4. Rozmaitości gładkie w \mathbf{R}^n	59
2.5. Rozmaitości indukowane i iloczynowe	65
2.6. Powierzchnie jednostronne. Wstęga Möbiusa i butelka Kleina	67
2.7. Odwzorowania rozmaitości	73
2.8. Krzywe gładkie	80
2.9. Klasyfikacja rozmaitości	84
3. Wektory i tensory	86
3.1. Geometryczny opis wektora	86
3.2. Przestrzeń styczna do \mathbf{E}^n	89
3.3. Liniowa transformacja współrzędnych w \mathbf{E}^n i zmiana bazy w $T_p\mathbf{E}^n$	91
3.4. Wektor jako operator różniczkowy	93
3.5. Przestrzeń styczna do rozmaitości	95
3.6. Gładkie pola wektorowe	99

3.7. Wektory kowariantne	102
3.8. Pola kowektorów i gradient funkcji	105
3.8.1. Graficzne przedstawienie kowektora	109
3.9. Tensory	112
3.10. Składowe i bazy tensorów	114
3.11. Pola tensorowe	116
3.12. Działania na tensorach	121
3.13. Komutator pól wektorowych	123
3.14. Tensor metryczny	127
3.15. Operacje na tensorach za pomocą metryki	136
3.16. Wyznaczniki i symbol Leviego–Civity	139
3.17. Uogólniony symbol Kroneckera	145
3.18. Tensory względne	148
3.19. Rozmaitości dwuwymiarowe	149
3.20. Metryka hiperpowierzchni	151
3.20.1. Sfera S^n	156
3.21. Przestrzenie hiperboliczne	158
3.21.1. Wstęp historyczny	158
3.21.2. Płaszczyzna hiperboliczna jako sfera w przestrzeni Minkowskiego	159
3.21.3. Model Kleina płaszczyzny Łobaczewskiego	160
3.21.4. Model Poincarégo płaszczyzny hiperbolicznej	162
3.21.5. Pseudosfera Beltramiego	163
3.21.6. Przekształcenia modeli	166
3.22. Orientowalność rozmaitości	167
4. Odwzorowania tensorów i pochodna Liego	171
4.1. Odwzorowania styczne funkcji i wektorów	171
4.2. Odwzorowania styczne dla kowektorów	175
4.3. Odwzorowania styczne dla dowolnych tensorów	176
4.4. Transformacje czynne i bierne	178
4.5. Symetrie i przeniesienie według Liego	179
4.6. Pochodna Liego	182
4.7. Ogólne własności pochodnej Liego	186
4.8. Pochodna Liego tensorów względnych	190
4.9. Symetrie	194
5. Pochodna absolutna i kowariantna	197
5.1. Pochodna absolutna wektora	198
5.2. Pochodna kowariantna wektora	200
5.3. Transformacje koneksji afinicznej	203
5.4. Pochodna kowariantna i absolutna tensora	205
5.5. Pochodne wyższych rzędów	210
5.6. Pochodne kowariantne tensorów względnych	211
5.7. Przestrzeń z koneksją afiniczną	213
5.7.1. Koneksja symetryczna i pochodna Liego	214
5.8. Przeniesienie równoległe	216
5.9. Linie geodezyjne	219
5.9.1. Przekształcenia geodezyjne koneksji afinicznej	224

5.9.2. Interpretacja geometryczna skręcenia koneksji	226
5.10. Odwzorowanie eksponencjalne i współrzędne riemannowskie	228
5.11. Krzywizna przestrzeni	232
5.12. Tensor krzywizny	233
5.13. Interpretacja geometryczna tensora krzywizny	241
5.14. Przestrzenie afinicznie płaskie	243
5.15. Pochodna Liego koneksji i krzywizny	248
6. Różniczkowanie w przestrzeni Riemanna	253
6.1. Koneksja metryczna i symetryczna	253
6.2. Kowariantne operatory różniczkowe	259
6.3. Tożsamości różniczkowe pierwszego rzędu dla metryki	263
6.4. Różniczkowanie tensorów względnych i pochodna Liego	266
6.5. Geodezyki jako linie najkrótsze	267
6.5.1. Form-inwariantność funkcjonału długości	273
6.5.2. Ekstremum warunkowe	276
6.6. Własności metryczne geodezyk	280
6.7. Przykłady linii geodezyjnych	285
6.8. Współrzędne normalne riemannowskie	295
6.9. Współrzędne normalne geodezyjne Gaussa	303
7. Krzywizna i izometrie przestrzeni Riemanna	308
7.1. Tensory Riemanna i Ricciego oraz skalar krzywizny	308
7.2. Przestrzenie metrycznie płaskie	311
7.3. Pola wektorowe kowariantnie stałe	313
7.4. Krzywizna przestrzeni w wymiarach 1, 2 i 3	315
7.5. Krzywizna przestrzeni S^2 , H^2 , T^2 , S^3 i H^3	318
7.6. Krzywizna przestrzeni wielowymiarowych. Tensor Weyla	320
7.7. Czasoprzestrzenie czterowymiarowe	324
7.7.1. Przestrzeń de Sittera	324
7.7.2. Przestrzeń anty-de Sittera	329
7.7.3. Czasoprzestrzenie Robertsona–Walkera	331
7.7.4. Płaska fala grawitacyjna	333
7.8. Tensory krzywizny i tensory Weyla dla różnych metryk	336
7.9. Niezmienniki tensora krzywizny	338
7.10. Tożsamości Bianchiego	342
7.10.1. Całkowe tożsamości Bianchiego	344
7.11. Dewiacja geodezyjna	348
7.12. Krzywizna sekcyjna	354
7.13. Krzywizna a metryka	357
7.14. Izometrie i przestrzenie symetryczne	358
7.14.1. Przestrzenie o stałej krzywiznie	360
7.14.2. Jednorodność i izotropowość	363
7.14.3. Symetria odbiciowa	365
7.15. Wektory Killinga	370
7.15.1. Klasyczna konstrukcja wektora Killinga	372
7.16. Wyznaczenie izometrii z wektorów Killinga	374

7.17. Własności wektorów Killinga	376
7.18. Warunki całkowalności równań Killinga	384
7.19. Wektory Killinga a jednorodność i izotropowość	387
7.20. Przykłady wektorów Killinga	390
7.21. Wektory ortogonalne do hiperpowierzchni	398
7.22. Izometrie przestrzeni zamkniętych	401
Skorowidz	404
Skorowidz nazwisk	410