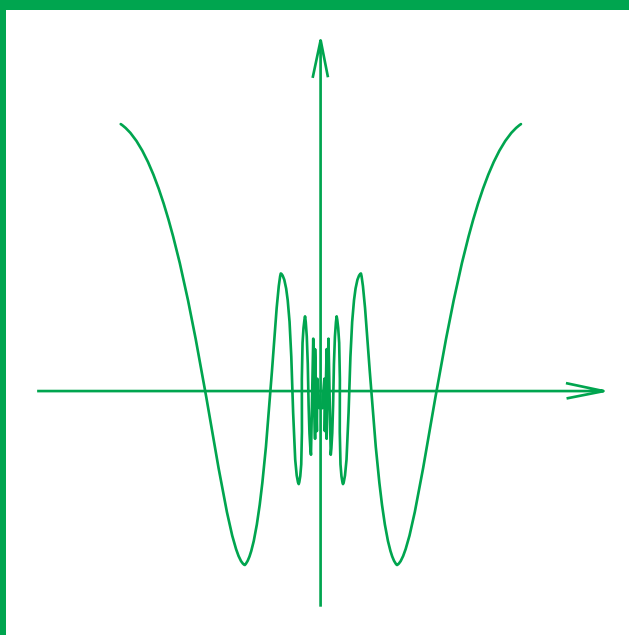


Joanna Ger

# Kurs matematyki dla chemików



WYDAWNICTWO  
UNIwersytetu ŚLĄSKIEGO

Kurs matematyki  
dla chemików

Podręczniki i Skrypty



Uniwersytetu Śląskiego  
w Katowicach  
nr 194

50<sup>lat</sup> Uniwersytetu  
Śląskiego  
w Katowicach

**Joanna Ger**

**Kurs matematyki  
dla chemików**

Wydanie szóste poprawione

---

Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego • Katowice 2018

Redaktor serii: Matematyka  
**Maciej Sablik**

Recenzenci I wydania  
**Józef Banaś**  
**Stanisław Stoiński**

# Spis treści

---

Przedmowa . . . . .	9
<b>1. Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości</b>	<b>11</b>
1.1. Elementy rachunku zdań . . . . .	11
1.2. Elementy rachunku kwantyfikatorowego . . . . .	13
1.3. Rachunek zbiorów . . . . .	15
1.4. Odwzorowania . . . . .	17
1.5. Zadania . . . . .	21
<b>2. Liczby rzeczywiste i zespolone. Funkcje elementarne</b>	<b>23</b>
2.1. Własności zbioru liczb rzeczywistych . . . . .	23
2.2. Funkcje monotoniczne i wypukłe . . . . .	30
2.3. Funkcje elementarne . . . . .	34
2.4. Liczby zespolone . . . . .	51
2.5. Zadania . . . . .	58
<b>3. Elementy algebry liniowej</b>	<b>61</b>
3.1. Macierze . . . . .	61
3.2. Wyznaczniki . . . . .	65
3.3. Wzory Cramera . . . . .	74
3.4. Układy liniowe . . . . .	80
3.5. Przestrzenie liniowe . . . . .	84
3.6. Baza i wymiar przestrzeni liniowej . . . . .	89
3.7. Rachunek wektorowy w $\mathbb{R}^n$ . . . . .	94
3.8. Odwzorowania liniowe . . . . .	99
3.9. Grupa przekształceń liniowych na płaszczyźnie . . . . .	108
3.10. Zadania . . . . .	110

<b>4. Ciągi i szeregi</b>	<b>113</b>
4.1. Ciągi liczbowe i ich własności . . . . .	113
4.2. Granica ciągu rzeczywistego i jej własności . . . . .	116
4.3. Granice niewłaściwe . . . . .	132
4.4. Zbieżność w przestrzeniach $\mathbb{R}^k$ ( $k \in \mathbb{N}$ ) . . . . .	135
4.5. Szeregi liczbowe . . . . .	136
4.6. Kryteria zbieżności szeregów . . . . .	140
4.7. Szeregi potęgowe . . . . .	148
4.8. Zadania . . . . .	151
<b>5. Granica i ciągłość odwzorowań</b>	<b>153</b>
5.1. Pewne szczególne podzbiory $\mathbb{R}^n$ . . . . .	153
5.2. Granica odwzorowania . . . . .	158
5.3. Własności granic funkcji . . . . .	161
5.4. Ciągłość odwzorowań . . . . .	165
5.5. Własności odwzorowań ciągłych w zbiorach zwartych . . . . .	169
5.6. Dalsze własności funkcji ciągłych . . . . .	171
5.7. Granice pewnych szczególnych funkcji . . . . .	179
5.8. Ciągłość funkcji elementarnych . . . . .	184
5.9. Zadania . . . . .	188
<b>6. Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej</b>	<b>191</b>
6.1. Iloraz różnicowy i pochodna . . . . .	191
6.2. Interpretacja pochodnej . . . . .	194
6.3. Pochodne funkcji elementarnych . . . . .	195
6.4. Działania na pochodnych . . . . .	197
6.5. Pochodna funkcji odwrotnej . . . . .	199
6.6. Pochodna funkcji złożonej . . . . .	201
6.7. Różniczka funkcji . . . . .	203
6.8. Pochodne wyższych rzędów . . . . .	204
6.9. Twierdzenia o wartości średniej . . . . .	205
6.10. Wnioski z twierdzeń o wartości średniej . . . . .	209
6.11. Ekstrema funkcji . . . . .	216
6.12. Wypukłość i punkty przegięcia funkcji . . . . .	219
6.13. Asymptoty . . . . .	220

6.14. Wyrażenia nieoznaczone i reguła de l'Hospitala . . . . .	221
6.15. Badanie przebiegu zmienności funkcji . . . . .	224
6.16. Szereg Taylora . . . . .	226
6.17. Całka nieoznaczona . . . . .	231
6.18. Zadania . . . . .	242
<b>7. Całka oznaczona na prostej</b>	<b>245</b>
7.1. Definicje . . . . .	245
7.2. Całkowalność pewnych klas funkcji . . . . .	248
7.3. Własności całki . . . . .	251
7.4. Interpretacja geometryczna całki . . . . .	262
7.5. Funkcja górnej granicy całkowania . . . . .	263
7.6. Twierdzenia o wartości średniej . . . . .	269
7.7. Całki niewłaściwe . . . . .	271
7.8. Krzywe w $\mathbb{R}^n$ . . . . .	278
7.9. Zadania . . . . .	283
<b>8. Rachunek różniczkowy w przestrzeniach <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>285</b>
8.1. Definicja różniczki . . . . .	285
8.2. Pochodne cząstkowe . . . . .	287
8.3. Formalne prawa różniczkowania . . . . .	294
8.4. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów i wzór Taylora . .	300
8.5. Ekstrema funkcji wielu zmiennych . . . . .	305
8.6. Funkcje uwikłane . . . . .	311
8.7. Ekstrema warunkowe . . . . .	316
8.8. Zadania . . . . .	323
<b>9. Całka oznaczona Riemanna w przestrzeni <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>325</b>
9.1. Definicja $n$ -wymiarowej całki Riemanna . . . . .	325
9.2. Własności całki . . . . .	329
9.3. Całki iterowane i ich związek z całką w $\mathbb{R}^n$ . . . . .	332
9.4. Całki w obszarach normalnych w $\mathbb{R}^2$ . . . . .	340
9.5. Powierzchnie w $\mathbb{R}^3$ . . . . .	347
9.6. Całki w obszarach normalnych w $\mathbb{R}^3$ . . . . .	349
9.7. Zastosowanie do zagadnień fizyki . . . . .	353



---

9.8. Zadania . . . . .	359
<b>10. Całka krzywoliniowa</b>	<b>361</b>
10.1. Orientacja krzywej . . . . .	361
10.2. Całka niezorientowana . . . . .	365
10.3. Całka krzywoliniowa zorientowana . . . . .	368
10.4. Twierdzenie Greena . . . . .	373
10.5. Niezależność całki od drogi całkowania . . . . .	377
10.6. Interpretacja wektorowa . . . . .	380
10.7. Zadania . . . . .	384
<b>11. Całka powierzchniowa</b>	<b>387</b>
11.1. Całka powierzchniowa niezorientowana . . . . .	387
11.2. Całka powierzchniowa zorientowana . . . . .	391
11.3. Zadania . . . . .	397
<b>12. Elementy teorii równań różniczkowych zwyczajnych</b>	<b>399</b>
12.1. Uwagi wstępne . . . . .	399
12.2. Pojęcie równania różniczkowego zwyczajnego rzędu pierwszego . . . . .	401
12.3. Problem Cauchy'ego dla równania różniczkowego rzędu pierwszego . . . . .	403
12.4. Pewne szczególne typy równań różniczkowych . . . . .	410
12.5. Układy równań liniowych rzędu pierwszego . . . . .	422
12.6. Równania liniowe $n$ -tego rzędu o stałych współczynnikach	430
12.7. Zadania . . . . .	441
<b>Literatura</b> . . . . .	<b>442</b>
<b>Skorowidz</b> . . . . .	<b>443</b>

# Przedmowa

---

Program studiów uniwersyteckich na kierunku chemii przewiduje w ramach pierwszego roku wykład podstawowych pojęć matematycznych. Wykład ten ma być użyteczny również w dalszym kształceniu chemików, dlatego poruszane zagadnienia muszą obejmować takie dziedziny matematyki, jak: rachunek różniczkowy i całkowy, równania różniczkowe, algebra liniowa i ogólna. Wszelako ograniczona liczba godzin wykładu nie pozwala na tak głębokie potraktowanie poruszanych tematów, jak tego pragnąłby wykładowca – matematyk.

Przez wiele lat wykładałam matematykę na pierwszym roku chemii w Uniwersytecie Śląskim, starając się zwalczać pokusę „przematematyzowania” z jednej strony, oraz pokusę zamiany wykładu w spis formułek i twierdzeń z drugiej.

Doświadczenie to, a także ścisły kontakt z pracownikami Instytutu Chemii i studentami podsunęły pomysł napisania skryptu, który zawierałby wiedzę matematyczną niezbędną do studiowania chemii uniwersyteckiej. Skrypt z założenia ma służyć słuchaczom wykładu.

Rezygnując z najbardziej ogólnego przedstawienia materiału, nie rezygnuję ze ścisłości rozumowania. Wszystkie dowody zatem są szczegółowe, chociaż część twierdzeń jest wypowiedziana mniej ogólnie niż można by to uczynić, biorąc pod uwagę obecną wiedzę matematyczną. Niektóre trudniejsze dowody zostały wszakże pominięte lub przeprowadzone w szczególnych przypadkach.

Ponieważ skrypt ma z założenia charakter podręcznika zawierającego wszystkie potrzebne wiadomości, pierwsze rozdziały poświęcone są wprowadzeniu pojęć podstawowych. Znajdziemy tu elementy logiki oraz definicje wielu pojęć. W rozdziale II zdefiniowane są funkcje elementarne. Wiadomości z algebry liniowej zamieszczono w rozdziale III. Pozostałe

rozdziały obejmują teorię rachunku różniczkowego i całkowego, najpierw na prostej, a potem w przestrzeniach euklidesowych. W ostatnim rozdziale omawiam równania różniczkowe, uwzględniając tak ważne dla chemików równanie Schrödingera.

Wykładowi matematyki towarzyszą ćwiczenia, w obrębie których są rozwiązywane zadania ilustrujące „teorię”. Nie rezygnuję jednak z zamieszczenia po każdym rozdziale zadań, które Czytelnik powinien rozwiązać bez kłopotu po zapoznaniu się z treścią danego rozdziału. Aby mu ułatwić zrozumienie tej treści, zamieszczam liczne przykłady pokazujące, jak rozwiązać typowe problemy z użyciem wyłożonych twierdzeń.

Na końcu skryptu zamieściłam literaturę, z której korzystałam, pisząc ten skrypt.

Jeszcze raz podkreślam, że skrypt odpowiada treścią i objętością wykładowi prowadzonemu w Uniwersytecie Śląskim. W szczególności, ze względu na znaczną redukcję godzin tego wykładu w ostatnich latach (90 godz. zamiast 120 godz.), nie może on już obejmować tak ważnego działu, jakim jest rachunek prawdopodobieństwa.

Pokonanie rozmaitych trudności, jakie niejednokrotnie pojawiały się w trakcie przygotowywania tego skryptu, zawdzięczam mojemu mężowi Romanowi, który wnikliwie czytał każdy kolejny rozdział. Jego liczne uwagi dotyczące zarówno układu przedstawianych treści, jak i ich merytorycznego i redakcyjnego ujęcia, poważnie wpłynęły na kształt skryptu. Pragnę mu podziękować za to bardzo serdecznie. Miło mi także złożyć wyrazy podziękowania panu Maciejowi Sablikowi za wiele cennych uwag i spostrzeżeń, które wykorzystałam, przygotowując ten skrypt. *Last but not least* – dziękuję pani Aleksandrze Hankus za wykonanie składu komputerowego tekstu, panu Adamowi Stolarzewiczowi za komputerowe zaprojektowanie rysunków oraz panu Adamowi Kolany za przetłumaczenie ich na język postscript-u.

Joanna Ger

Katowice, 15 kwietnia 2003 roku

Redakcja  
**Grażyna Wojdała**

Korekta  
**Danuta Stencel**

Skład i łamanie  
**Aleksandra Hankus**

Copyright © 2018 by  
Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego  
Wszelkie prawa zastrzeżone

**ISSN 1644-0552**  
**ISBN 978-83-226-3425-7**  
(wersja drukowana)  
**ISBN 978-83-226-3426-4**  
(wersja elektroniczna)

Wydawca  
**Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego**  
**ul. Bankowa 12B, 40-007 Katowice**  
[www.wydawnictwo.us.edu.pl](http://www.wydawnictwo.us.edu.pl)  
[e-mail:wydawus@us.edu.pl](mailto:wydawus@us.edu.pl)

---

Wydanie VI. Ark. wyd. 27,5 Ark. druk.  
28,25. Papier offset kl. III 90 g.

Cena 30 zł (+VAT)

---

Druk i oprawa:  
"TOTEM.COM.PL Sp. z o.o." Sp.K.  
ul. Jacewska 89, 88-100 Inowrocław

ISSN 1644-0552  
Cena 30 zł (+ VAT)

Więcej o książce

ISBN 978-83-226-3426-4



9

