Rozdział 8

Macierze i wyznaczniki

8.1 Macierze

Niech $m, n \in \mathbb{N}_+$ oraz

$$Z = \{(i,j)\colon 1 \leqslant i \leqslant m \wedge 1 \leqslant j \leqslant n\}.$$

Funkcję określoną w zbiorze Z o warościach w ciele K nazywamy *macierzą prostokątną* o m wierszach i n kolumnach, tj. każdej parze (i,j) jest przypisany element a_{ij} z ciała K. Mówimy wtedy o macierzy o wyrazach z ciała K. Innymi słowy, macierz prostokątna wymiaru $m \times n$ to tablica prostokątna złożona z m wierszy i n kolumn, której wyrazy są elementami ciała K. Macierz zapisujemy zatem w następującej postaci:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{lub} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

lub w skróconym zapisie: (a_{ij}), zaznaczając w razie potrzeby zakres zmienności wskaźników i oraz j. Macierze zwyczajowo będziemy oznaczać dużymi literami $A, B, C, \ldots$.

Uwaga 8.1 Wszystkie definicje w tym i następnym paragrafie można zdefiniować w przypadku, gdy zamiast ciała K będziemy rozpatrywać pierścienie przemienne P z jedynką.

Uwaga 8.2 W przykładach bardzo często nie będziemy zapisywać wyraźnie ciała, przy którym rozpatrujemy macierze - przyjmujemy, że z kontekstu wynika, jakie ciało rozpatrujemy.

W niniejszej książce będziemy główne koncentrować się na macierzach rzeczywistych (o wyrazach rzeczywistych) lub zespolonych (o wyrazach zespolonych) lub macierzach, której wyrazy są odwzorowaniami. Przykłady takich macierzy podajemy poniżej:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ 1 & 1 \\ 8 & -\frac{1}{2} \\ -3 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & 1-i & 0 & 3 \\ 3i & 6 & 3i-2 & 4i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x & \frac{1}{x}-x & 2 \\ x^2 & 0 & 0 \\ 4 & 1-x^2 & x^3 \end{pmatrix}$$

W pierwszym przypadku mamy macierz rzeczywistą o wymiarze 5×2, w drugim macierz zespoloną wymiaru 2×4, zaś w trzecim macierz wymiaru 3×3, której elementy to funkcje rzeczywiste zmiennej rzeczywistej.

Niech K będzie ciałem liczbowym. Rozpatrzmy zbiór

$$K^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \colon x_i \in K \land i \in \{1, 2, \dots, n\}\},$$

gdzie $n \in \mathbb{N}_+$. Wówczas element $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ciała K^n można zapisywać w postaci wierszowej, tak jak w definicji, lub w postaci kolumnowej (macierzy wymiaru $n \times 1$)

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Definicja 8.1 Macierz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ nazywamy:

(1) *macierzą kwadratową*, gdy liczba wierszy jest taka sama jak liczba kolumn, czyli mamy $m = n$. Mówimy wtedy, że macierz jest wymiaru $n \times n$ lub jest macierzą stopnia n;

(2) *macierzą zerową*, gdy wszystkie wyrazy są równe 0

$$O_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix};$$

(3) *macierzą jednostkową*, gdy jest macierzą kwadratową postaci

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix};$$

(4) *macierzą przeciwną do macierzy* $B = (b_{ij})_{m\times n}$, gdy $A + B = O_{m,n}$. Macierz przeciwną do macierzy B oznaczamy symbolem $-B$.

Jeżeli K jest ciałem, $m, n \in \mathbb{N}_+$, to będziemy stosować oznaczenia:

1. $M_{m,n}(K)$ - zbiór wszystkich macierzy prostokątnych wymiaru $m \times n$ o wyrazach z ciała K;
2. $M_n(K)$ - zbiór wszystkich macierzy kwadratowych stopnia n o wyrazach z ciała K.

Definicja 8.2 Powiemy, że macierze $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ są *równe*, co zapisujemy $A = B$, gdy $a_{ij} = b_{ij}$ dla każdego $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

Rozważmy macierze o wyrazach z pierścienia z jedynką $P = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon y = f(x)\}$ określone następująco:

$$A = \begin{pmatrix} 2-x & -1 \\ \frac{1}{x^2+1} & x \\ x^2 & 1-x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2-x & -1 \\ \frac{1}{x^2+1} & \sqrt{x^2} \\ \sqrt{x^4} & 1-x \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2-x & -1 \\ \frac{1}{x^2+1} & \frac{x^5+x}{x^4+1} \\ \sqrt{x^4} & 1-x \end{pmatrix}$$

Widzimy, że macierze A i B nie są sobie równe, ponieważ funkcje $a_{22} = f(x) = x$ i $b_{22} = g(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ nie są równe, natomiast w przypadku macierzy A i C stwierdzamy ich równość, gdyż dziedzinami funkcji

$$c_{22} = f(x) = \frac{x^5 + x}{x^4 + 1} = \frac{x(x^4 + 1))}{x^4 + 1} = x, \quad c_{31} = \sqrt{x^4} = |x^2| = x^2$$

jest zbiór $\mathbb{R}$ i $a_{22} = c_{22}, a_{31} = c_{31}$ (pozostałe wyrazy są sobie odpowiednio równe).

Przykład 8.1 Wykazać, że relacja $\sim$ w zbiorze $M_{m,n}(\mathbb{R})$, która jest określona następująco:

$$A \sim B \iff \forall_{i \in \{1,\ldots,m\}} \forall_{j \in \{1,\ldots,n\}} (2i | (a_{ij} - b_{ij}))$$

jest relacją równoważności.

<u>Rozwiązanie</u>
Niech A, B i C będą macierzami z $M_{m,n}(\mathbb{R})$. Oczywiście $a_{ij} - a_{ij} = 0$ jest liczbą podzielną przez $2i$, czyli $A \sim A$, co oznacza, że relacja ta jest zwrotna. Jeżeli założymy teraz, że $A \sim B$, to $2i|(a_{ij} - b_{ij})$, skąd $2i| - (a_{ij} - b_{ij})$ i w konsekwencji $2i|(b_{ij} - a_{ij})$. To oznacza, że $B \sim A$, a zatem relacja jest symetryczna. Aby wykazać przechodniość, to zakładamy, że $A \sim B$ i $B \sim C$, tj. $2i|(a_{ij} - b_{ij})$ i $2i|(b_{ij} - c_{ij})$. Wówczas suma liczb $a_{ij} - b_{ij}$ i $b_{ij} - c_{ij}$ jest podzielna przez $2i$, czyli $2i|(a_{ij} - c_{ij})$. Stwierdzamy, że $A \sim C$. Pokazaliśmy, że relacja jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, a zatem jest relacją równoważności.

Przykład 8.2 Wyznaczyć wartości parametru a, dla których macierze

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -5 & a^2 - 3a + 1 & 0 \\ 0 & a^4 + 5a^2 + 5a & -2 & a \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -5 & a - 2 & 0 \\ 0 & 5a^3 + 6 & -2 & a \end{pmatrix}$$

są równe.

<u>Rozwiązanie</u>
Zgodnie z definicją macierze A_1 i A_2 będą równe, gdy wyrazy macierzy A_1 są takie same jak wyrazy na odpowiednich miejscach w macierzy A_2. Wobec tego muszą być spełnione warunki:

$$\begin{cases} a^2 - 3a + 1 = a - 2 \\ a^4 + 5a^2 + 5a = 5a^3 + 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a^2 - 4a + 3 = 0 \\ a^4 - 5a^3 + 5a^2 + 5a - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (a-1)(a-3) = 0 \\ (a-1)(a+1)(a-2)(a-3) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a \in \{1, 3\} \\ a \in \{-1, 1, 2, 3\} \end{cases}$$

Na tej podsawie wnioskujemy, że $a \in \{1, 3\}$.

Definicja 8.3 *Macierzą trnasponowaną* do macierzy $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ nazywamy macierz $A^T = (a_{ji}) \in M_{n,m}(K)$, czyli wiersze macierzy A stają się kolumnami macierzy A^T, zaś kolumny macierzy A są wierszami macierzy A^T.

Jeśli $A, B \in M_{m,n}(K)$, to macierz $A + B$ definiujemy jako

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}),$$

zaś macierz αA, gdzie $\alpha \in K$, określamy następująco

$$\alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij}).$$

Jeżeli $A \in M_{m,k}(K)$ oraz $B \in M_{k,n}(K)$, to iloczyn macierzy A, B określamy jako macierz $C \in M_{m,n}(K)$, gdzie

$$C = (c_{ij}), \quad c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Zwróćmy uwagę, że aby wykonać mnożenie macierzy, to liczba kolumn pierwszej macierzy musi być równa ilości wierszy w drugiej macierzy. Iloczyn macierzy wymiaru $m \times k$ i $k \times n$ daje macierz wymiaru $m \times n$.

Uwaga 8.3 Jeżeli wyznaczamy macierze $A+B$, αA i $A \cdot B$, to wyznaczając wyrazy tych macierzy stosujemy działania na elementach z ciała K względem działań dodawania i mnożenia określonych w K.

Twierdzenie 8.1 (własności operacji transponowania)
Niech $A, B \in M_{m,n}(K)$. Wówczas:

(T1) $(A^T)^T = A$; (T2) $(A+B)^T = A^T + B^T$; (T3) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;
(T4) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Przykład 8.3 Niech dane będą macierze zespolone

$$A = \begin{pmatrix} i & 2-i & 1 \\ 5i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & i & -i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3-i & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Wyznaczyć $3A - 2B + (4C)^T$, $(iA \cdot C)^T - (B \cdot C)^T$.

<u>Rozwiązanie</u>
Otrzymujemy:

$$3A - 2B + (4C)^T = \begin{pmatrix} 3i & 6-3i & 3 \\ 15i & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 2i & -2i \\ 0 & -2i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 12-4i & 4 \\ 4i & 0 \end{pmatrix}^T$$
$$= \begin{pmatrix} 3i-10 & 6-5i & 3+2i \\ 15i & 2i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 12-4i & 4i \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3i-10 & 18-9i & 3+6i \\ 15i & 4+2i & 0 \end{pmatrix}.$$

W celu wyliczenia $(i(A \cdot C))^T - (B \cdot C)^T$ obliczamy kolejno:

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} i & 2-i & 1 \\ 5i & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3-i & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (2-i)(3-i)+i & 2-i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-4i & 2-i \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

zatem

$$(i(A \cdot C))^T = \begin{pmatrix} 4+5i & 1+2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4+5i & 0 \\ 1+2i & 0 \end{pmatrix}.$$

Dalej

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & i & -i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3-i & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(3-i)-i^2 & i \\ -i(3-i) & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3i+2 & i \\ -3i-1 & -i \end{pmatrix},$$

skąd

$$(B \cdot C)^T = \begin{pmatrix} 3i+2 & -3i-1 \\ i & -i \end{pmatrix}.$$

Ostatecznie wyliczamy:

$$(i(A \cdot C))^T - (B \cdot C)^T = \begin{pmatrix} 5i+4 & 0 \\ 2i+1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3i+2 & -3i-1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i+2 & 3i+1 \\ 1+i & i \end{pmatrix}.$$

Przykład 8.4 Niech $K = \mathbb{Z}_5$ oraz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Obliczyć $A \cdot (B \cdot C)$.

<u>Rozwiązanie</u>
Wyznaczając wyrazy macierzy $A \cdot (B \cdot C)$ bierzemy pod uwagę działanie dodawania i mnożenia modulo 5. Kolejno wyliczamy

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Twierdzenie 8.2 Niech A, B, C będą macierzami o wyrazach z ciała K oraz $\alpha, \beta \in K$. Wówczas w zbiorze $M_{m,n}(K)$

(M1) działanie dodawania macierzy jest łączne: $(A + B) + C = A + (B + C)$;

(M2) działanie dodawania macierzy jest przemienne: $A + B = B + A$;

(M3) elementem neutralnym względem dodawania macierzy jest $O_{m,n}$: $A + O_{m,n} = A$;

(M4) działanie mnożenia macierzy jest łączne: $(AB)C = A(BC)$;

(M5) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

(M6) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

(M7) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;

(M8) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;

(M9) działanie mnożenia jest rozdzielne względem dodawania

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (A + B)C = AC + BC;$$

(M10) $AI_n = I_m A = A$.

Na podstawie tego twierdzenia możemy wywnioskować:

Twierdzenie 8.3 Jeżeli K jest ciałem, to zbiór $(M_{m,n}(K), +)$ jest grupą abelową.

Twierdzenie 8.4 Jeżeli K jest ciałem, to zbiór $(M_n(K), +, \cdot)$ jest pierścieniem z jedynką.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że mnożenie macierzy na ogół nie jest działaniem przemiennym. Świadczy o tym następujący:

Przykład 8.5 Wyznaczyć AB i BA, gdy: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Rozwiązanie</u>
Kolejno obliczamy:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Widzimy, że $AB \neq BA$.

Przykład 8.6 Niech $P = \mathbb{R}[X]$. Znaleźć macierz stopnia 2, która spełnia równanie:

$$3X + 6X^T = \begin{pmatrix} x^3 & x^2 \\ 1 & 6x \end{pmatrix}$$

<u>Rozwiązanie</u>
Na podstawie własności w Twierdzeniu 8.1 i Twierdzeniu 8.2 możemy zapisać:

$$\left(3X + 6X^T\right)^T = \begin{pmatrix} x^3 & x^2 \\ 1 & 6x \end{pmatrix}^T \Longrightarrow 3X^T + 6\left(X^T\right)^T = \begin{pmatrix} x^3 & 1 \\ x^2 & 6x \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$3X^T + 6X = \begin{pmatrix} x^3 & 1 \\ x^2 & 6x \end{pmatrix}.$$

Zatem muszą być jednocześnie spełnione równości:

$$3X + 6X^T = \begin{pmatrix} x^3 & x^2 \\ 1 & 6x \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad 3X^T + 6X = \begin{pmatrix} x^3 & 1 \\ x^2 & 6x \end{pmatrix}$$

Mnożąc drugą równość przez -2 i dodając do pierwszej otrzymujemy:

$$-9X = \begin{pmatrix} x^3 & x^2 \\ 1 & 6x \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} x^3 & 1 \\ x^2 & 6x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^3 & x^2 - 2 \\ 1 - 2x^2 & -6x \end{pmatrix}$$

W rezultacie

$$X = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -x^3 & x^2 - 2 \\ 1 - 2x^2 & -6x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9}x^3 & -\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9}x^2 - \frac{1}{9} & \frac{2}{3}x \end{pmatrix}$$

Przykład 8.7 Niech $K = \mathbb{Z}_7$. Rozwiązać układ

$$\begin{cases} 3X + 2Y^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \\ 3X^T + 6Y = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

<u>Rozwiązanie</u>
Na podstawie Twierdzenie 8.1 mamy

$$\begin{cases} 3X + 2Y^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \\ \left(3X^T + 6Y\right)^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^T \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3X + 2Y^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \\ 3X + 6Y^T = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} / \cdot 2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 3X + 2Y^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \\ 6X + 5Y^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Po dodaniu stronami dostajemy

$$2X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Na podstawie drugiego równania w układzie i wyznaczonej macierzy X znajdujemy

$$6Y = 4X^T + \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Stąd

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Przykład 8.8 Niech $z \in \mathbb{C}$. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi wzór:

$$\begin{pmatrix} 1 & z^2 \\ 0 & z^2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & z^2 + z^4 + \ldots + z^{2n} \\ 0 & z^{2n} \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie

Dowód przeprowadzimy metodą indukcji matematycznej. Jeżeli $n = 2$, to

$$\begin{pmatrix} 1 & z^2 \\ 0 & z^2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & z^2 \\ 0 & z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & z^2 \\ 0 & z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z^2 + z^4 \\ 0 & z^4 \end{pmatrix},$$

czyli w tym przypadku równość jest spełniona.
Załóżmy, że

$$\begin{pmatrix} 1 & z^2 \\ 0 & z^2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & z^2 + z^4 + \ldots + z^{2n} \\ 0 & z^{2n} \end{pmatrix}$$

dla liczby naturalnej n. Wówczas dla $n+1$ uzyskujemy:

$$\begin{pmatrix} 1 & z^2 \\ 0 & z^2 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & z^2 \\ 0 & z^2 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & z^2 \\ 0 & z^2 \end{pmatrix} \overset{\text{(zał)}}{=} \begin{pmatrix} 1 & z^2 + z^4 + \ldots + z^{2n} \\ 0 & z^{2n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & z^2 \\ 0 & z^2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & z^2 + z^4 + \ldots + z^{2n+2} \\ 0 & z^{2n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z^2 + z^4 + \ldots + z^{2(n+1)} \\ 0 & z^{2(n+1)} \end{pmatrix}$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej wnioskujemy, że wzór jest spełniony dla każdej liczby naturalnej n.

Przykład 8.9 Pokazać, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ spełniona jest zależność:

$$\begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix}^{4n-1} = \begin{pmatrix} -\sin((4n-1)x) & -\cos((4n-1)x) \\ \cos((4n-1)x) & -\sin((4n-1)x) \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie

Dowód przeprowadzamy w sposób indukcyjny. Jeżeli $n = 1$, to

$$\begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sin^2 x - \cos^2 x & 2\sin x\cos x \\ -2\cos x \sin x & \sin^2 x - \cos^2 x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & -\cos 2x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\cos 2x \sin x - \cos x \sin 2x & -\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x \\ -\sin 2x \sin x + \cos 2x \cos x & -\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin 3x & -\cos 3x \\ \cos 3x & -\sin 3x \end{pmatrix}$$

W tym przypadku uzyskujemy żądaną równość.
Przyjmujemy, że podana zależność jest spełniona dla liczby naturalnej $n \geqslant 1$. Wtedy dla $n+1$ mamy

$$\begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix}^{4n+3} = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix}^{4n-1} \cdot \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix}^{4} \overset{(\text{zał})}{=}$$

$$\begin{pmatrix} -\sin((4n-1)x) & -\cos((4n-1)x) \\ \cos((4n-1)x) & -\sin((4n-1)x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix}^{4} =$$

$$\begin{pmatrix} -\sin((4n-1)x) & -\cos((4n-1)x) \\ \cos((4n-1)x) & -\sin((4n-1)x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix}^{3} \cdot \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\sin((4n-1)x) & -\cos((4n-1)x) \\ \cos((4n-1)x) & -\sin((4n-1)x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin 3x & -\cos 3x \\ \cos 3x & -\sin 3x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\sin((4n-1)x) & -\cos((4n-1)x) \\ \cos((4n-1)x) & -\sin((4n-1)x) \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} -\sin 3x \sin x + \cos 3x \cos x & -\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x \\ \cos 3x \sin x + \sin 3x \cos x & \cos 3x \cos x - \sin 3x \sin x \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\sin((4n-1)x) & -\cos((4n-1)x) \\ \cos((4n-1)x) & -\sin((4n-1)x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos 4x & -\sin 4x \\ \sin 4x & \cos 4x \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\sin((4n+3)x) & -\cos((4n+3)x) \\ \cos((4n+3)x) & -\sin((4n+3)x) \end{pmatrix},$$

czego należało dowieść.

Definicja 8.4 Macierz kwadratową $A = (a_{ij})_{n\times n}$ nazywamy:

(1) *górnotrójkątną,* gdy $a_{ij} = 0$ dla $i > j$, tj.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

(2) *dolnotrójkątną,* gdy $a_{ij} = 0$ dla $i < j$, tj.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

(3) *diagonalną*, gdy $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$, tj.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

(4) *symetryczną*, gdy $a_{ij} = a_{ji}$, czyli $A = A^T$. Zatem:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & a_{4n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

(5) *antysymetryczną*, gdy $a_{ij} = -a_{ji}$, czyli $A = -A^T$. Zatem:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & -a_{4n} & \dots & 0 \end{pmatrix};$$

Definicja 8.5 *Macierzą sprzężoną* do macierzy zespolonej $A = (a_{ij})_{m\times n}$ nazywamy macierz

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & \dots & \overline{a_{1n}} \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} & \dots & \overline{a_{2n}} \\ \overline{a_{31}} & \overline{a_{32}} & \dots & \overline{a_{3n}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \overline{a_{n1}} & \overline{a_{n2}} & \dots & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Definicja 8.6 Będziemy mówić, że macierz zespolona $A = (a_{ij})_{n\times n}$ jest *hermitowska*, gdy $A = \overline{A^T}$.

Przykład 8.10 Wyznaczyć wszystkie macierze górnotrójkątne stopnia 2, które spełniają równanie macierzowe:

$$X^4 - 3X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 26 \\ 0 & 550 \end{pmatrix}$$

<u>ROZWIĄZANIE</u>

Macierzy X będziemy poszukiwać w postaci: $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$ Dokonajmy podstawienia $Y = X^2$. Wówczas macierz Y też jest macierzą górnotrójkątną, gdyż

$$Y = X^2 = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & xy + yz \\ 0 & y^2 \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

Przyjmijmy

$$Y = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \tag{8.2}$$

Widzimy, że $a \geqslant 0$ i $c \geqslant 0$ i nasze równanie przyjmuje postać

$$Y^2 - 3Y = \begin{pmatrix} 4 & 26 \\ 0 & 550 \end{pmatrix}.$$

Ze względu na (8.2) i powyższe równanie prawdą jest, że

$$\begin{pmatrix} a^2 - 3a & ab + bc - 3b \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 26 \\ 0 & 550 \end{pmatrix}$$

Z równości powyżych macierzy wynika, że spełnione są warunki:

$$a^2 - 3a = 4, \quad ab + bc - 3b = 26, \quad c^2 - 3c = 550.$$

Z pierwszego i trzeciego równania mamy $a \in \{-1, 4\}$, $c \in \{-22, 25\}$. Skoro $a \geqslant 0, c \geqslant 0$, to $a = 4$ i $c = 25$. Teraz już z drugiego równania wyznaczamy $b = 1$ i w konsekwencji

$$Y = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$$

Powracając do miejsca podstawienia (8.1) dostajemy:

$$\begin{pmatrix} x^2 & xy + yz \\ 0 & z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$$

Stąd $x^2 = 4, z^2 = 25, xy + yz = 1$, czyli

$$(x, y, z) \in \left\{ \left(-2, -\frac{1}{7}, -5\right), \left(-2, \frac{1}{3}, 5\right), \left(2, -\frac{1}{3}, -5\right), \left(2, \frac{1}{7}, 5\right) \right\}.$$

Ostatecznie:

$$X \in \left\{ \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{7} \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{7} \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Przykład 8.11 Wyznaczyć wszystkie macierze zespolone diagonalne X stopnia n i o wyrazach czysto urojonych, dla których

$$X^n \cdot \overline{X}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}^n$$

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że jeśli $X = (a_{ij})_{n \times n}$ jest macierzą diagonalną, to

$$X^n = \begin{pmatrix} a_{11}^n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^n \end{pmatrix}$$

Wobec tego

$$X^n \cdot \overline{X}^n = \begin{pmatrix} |a_{11}|^{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |a_{22}|^{2n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & |a_{33}|^{2n} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & |a_{nn}|^{2n} \end{pmatrix}$$

Nasze równanie przyjmuje postać:

$$\begin{pmatrix} |a_{11}|^{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |a_{22}|^{2n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & |a_{33}|^{2n} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & |a_{nn}|^{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n^n \end{pmatrix}$$

stąd wnioskujemy, że $|a_{kk}|^{2n} = k^n$, gdzie $k \in \{1, \dots n\}$. Skoro a_{kk} jest liczbą czysto urojoną, to $a_{kk} = y_k i$, gdzie $y_k \in \mathbb{R}$. Zatem $|y_k|^{2n} = k^n$, skąd $y_k \in \{-\sqrt{k}, \sqrt{k}\}$ i w konsekwencji $a_{kk} \in \{-\sqrt{k}i, \sqrt{k}i\}$. Poszukiwane macierze diagonalne X to macierze

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

dla których $a_{kk} \in \{-\sqrt{k}i, \sqrt{k}i\}$. Ilość takich macierzy wynosi 2^n.

Przykład 8.12 Rozwiązać równanie macierzowe: $X^2 + 5X + 6I_n = 0$ w przestrzeni $U = \{\alpha I_n \colon \alpha \in \mathbb{R}\}$.

<u>Rozwiązanie</u>
Rozłożymy wyrażenie $X^2 + 5X + 6I_n$ na czynnniki liniowe. W tym celu wyznaczamy pierwiastki równania $t^2 + 5t + 6 = 0$, które wynoszą $t_1 = -3$, $t_2 = -2$. Wówczas:

$$X^2 + 5X + 6I_n = 0 \Longleftrightarrow (X + 3I_n)(X + 2I_n) = 0 \Longleftrightarrow X + 3I_n = 0 \vee X + 2I_n = 0.$$

Stąd $X = -3I_n$ lub $X = 2I_n$.

Przykład 8.13 Podać przykład macierzy z przestrzeni $M_2(\mathbb{R})$, które nie są diagonalne, i spełniają równanie $X^2 + 5X + 6I_n = 0$.

<u>Rozwiązanie</u>
Poszukując macierzy X w postaci $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, które spełniają podane równanie macierzowe, możemy przyjąć:

$$X = \begin{pmatrix} -3 & b \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Czytelnik sprawdzi, że takie macierze należą do zbioru rozwiązań rozpatrywanego równania.

Przykład 8.14 Uzasadnić następujące równości:

1. $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$; 2. $\overline{\alpha A} = \overline{\alpha}\overline{A}$; 3. $\overline{\overline{A}} = A$.