Przedmowa do pierwszego wydania

Podręcznik ten jest znacznym rozwinięciem wykładów, jakie w Uniwersytecie Jagiellońskim prowadziłem przez wiele lat dla studentów astronomii i przez kilka lat dla studentów fizyki. Wielka kariera rachunku tensorowego zaczęła się z powstaniem teorii względności. Obecnie stał się on niemal uniwersalnym aparatem matematycznym fizyki i wykroczył poza jej właściwy obszar, znajdując zastosowania w najszerzej pojętej mechanice ośrodków ciągłych. Z tego powodu adresuję podręcznik do szerokiego kręgu odbiorców: fizyków, astronomów, geofizyków oraz studiujących hydrodynamikę i teorię sprężystości (i nie wyróżniam teorii względności). Ze względu na to, że adresuję go do czytelników stosujących rachunek tensorowy w rozmaitych działach nauk ścisłych, nie podaję żadnych zastosowań, każdy bowiem wybór byłby arbitralny i sugerowałby, że ten obszar zastosowań jest najistotniejszy. Czytelnik sam zorientuje się, gdzie analizę tensorową należy stosować, np. rozpozna, że gdy równania Newtona wyrażające drugą zasadę dynamiki zapisze się we współrzędnych krzywoliniowych, takich jak sferyczne, to pochodną zwyczajną względem czasu trzeba zastąpić pochodną absolutną.

Książka ta ma spełniać dwa cele. Po pierwsze, jest podręcznikiem, co uzasadnia jej dużą objętość: daję studentowi sporo objaśnień i komentarzy, przez co treść nie jest zbyt skondensowana. Po drugie, mając podręcznikowy, czytelny charakter, jest monografią dla bardziej zaawansowanych użytkowników, bowiem znaczna część materiału, zwłaszcza w rozdziałach 4, 5 i 6 oraz większość rozdziału 7, jest tym użytkownikom potrzebna, a zarazem dostępna tylko w wysoce specjalistycznej literaturze i po polsku ukazuje się po raz pierwszy.

Znaczenie rachunku tensorowego kontrastuje z luką na polskim rynku wydawniczym. Ostatnie książki na ten temat ukazały się ponad czterdzieści lat temu i są trudno dostępne. Po nich wydano kilka podręczników teorii względności zaczynających się od zwięzłego wykładu analizy tensorowej ukierunkowanego na teorię Einsteina, zwykle niekompletnego — korzystają więc z niego tylko fizycy relatywiści. Co więcej, klasyczne podręczniki rachunku tensorowego są przestarzałe w sformułowaniu jego podstaw i nie pasują do kursu analizy matematycznej na politechnikach i uniwersytetach (nauki fizyczne), a tym bardziej odstają od wykładów dla studentów matematyki. To jest główny powód napisania tego podręcznika.

Rachunek tensorowy jest metodą analityczną geometrii różniczkowej, jest zatem kwestią konwencji, a przede wszystkim gustu autora, ile w książce będzie geometrii, a ile samych tensorów. Aby uniknąć nieporozumień, podkreślam, że jest to podręcznik analizy tensorowej, a nie zastosowań geometrii w naukach fizycznych. O geometrii mówię więc tyle, ile potrzeba, by pokazać moc i użyteczność tej analizy. Jeśli chodzi o poziom abstrakcji i nowoczesności, to przyjąłem tutaj etap pośredni między nowoczesną geometrią formułowaną bez użycia współrzędnych a klasycznym podejściem do tensorów, w którym wszystko wyraża się za pomocą składowych. Ujęcie klasyczne okazało się, po niemal stu latach używania tensorów, bardziej praktyczne, lecz trudno w nim wyrazić, czym właściwie jest tensor i w jakich przestrzeniach istnieje. Tego dostarcza ujęcie nowoczesne.

Tradycyjnie mówi się, że tensor działa w n–wymiarowej przestrzeni Riemanna lub przestrzeni niemetrycznej. Chcę pokazać ogromne bogactwo tych przestrzeni i dlatego przeznaczyłem cały obszerny rozdział na zdefiniowanie i przedstawienie rozmaitości różniczkowych. Wektor definiuję jako operator różniczkowy działający w przestrzeni funkcji gładkich na rozmaitości, bo to pozwala zrozumieć wiele rzeczy i jest naturalne nie tylko dla fizyków zaznajomionych z mechaniką kwantową. Z doświadczenia wiem, że przejście od czysto algebraicznego pojęcia wektora do obiektu geometrycznego w przestrzeni stycznej sprawia wielu uczącym się trudności i omawiam tę kwestię bardzo szczegółowo.

Definicje i podstawowe twierdzenia podaję w języku geometrii, natomiast większość rachunków najprościej jest prowadzić dla składowych tensorów. Cały wykład algebry i analizy tensorowej prowadzę od podstaw, bez zakładania jakiejś znajomości przedmiotu u czytelnika.

Styl tej książki różni się od rozpowszechnionego i przez wiele lat modnego, suchego i skrajnie lakonicznego stylu prezentacji matematyki nowoczesnej; w niektórych miejscach tekst może się wydać przegadany. Nie przestrzegałem również zasady, by jakąś informację podawać tylko raz, jest tu szereg powtórzeń, co z pewnego punktu widzenia jest mniej eleganckie, za to ułatwia lekturę czytelnikowi. Ponadto niektóre zagadnienia omawiam z paru różnych punktów widzenia, np. przestrzeń izotropową definiuję i opisuję na trzy różne sposoby, a potem jej własności wyrażam jeszcze za pomocą wektorów Killinga.

Wielkim nieobecnym są tu formy różniczkowe. Wywodzą się z rachunku tensorowego, a obecnie są niezależnym i rozbudowanym aparatem geometrii różniczkowej, mającym szerokie zastosowania w całej matematyce i fizyce. Umieszczanie ich w książce o analizie tensorowej byłoby więc niewłaściwe, nie mówiąc o tym, że ogromnie powiększyłoby jej objętość. Formy różniczkowe w $\mathbf{R}^n$ są obecnie przedstawione w standardowych podręcznikach z analizy matematycznej, a dla form na rozmaitościach istnieje znakomita książka Flandersa, która zupełnie się nie zestarzała, mimo że została napisana w 1963 r. (polskie wydanie ukazało się w 1969 r.). W konsekwencji zrezygnowałem z podawania twierdzeń całkowych, które obecnie formułuje się za pomocą form różniczkowych. Zrezygnowałem również z języka wiązek, gdyż poza samą geometrią ich praktyczne zastosowania są niewielkie. Sporo miejsca za to poświęcam pochodnej Liego ze względu na jej związek z wielkościami zachowywanymi.

Dla profesjonalnego matematyka przedstawiony tu wykład jest momentami zbyt drobiazgowy, ogólnie za mało zalgebraizowany i za mało ścisły. Ze ścisłości zrezygnowałem świadomie tam, gdzie przysłania jasność wywodu i gdzie fachowiec jest w stanie bez trudu ją przywrócić. Przyjmuję też za intuicyjnie oczywiste istnienie pewnych obiektów i ich własności tam, gdzie matematyk niebanalnym rozumowaniem tego istnienia dowodzi. Starałem się natomiast, w miarę możności, przestrzegać ścisłości w kwestiach, gdzie intuicja zawodzi: w konstruowaniu rozmaitości różniczkowych, definiowaniu wektorów, odwzorowań stycznych i pochodnej Liego oraz paru innych miejscach. Chcę dać czytelnikowi rozumienie, a nie tylko technikę rachunkową. Być może i dla matematyka interesujące będzie zobaczyć, jak wiele można zasadnie osiągnąć za pomocą niewielkiej tylko części potężnego aparatu abstrakcyjnej geometrii różniczkowej.

Zakładam, że czytelnik zna analizę matematyczną w przestrzeni euklidesowej na poziomie standardowego wykładu na politechnice lub uniwersytecie na kierunkach ścisłych (lecz nie na matematyce); przede wszystkim znajomość rachunku różniczkowego funkcji wielu zmiennych i podawanych w ramach takiego wykładu najbardziej elementarnych pojęć topologii. Zakładam, że ma standardową wiedzę z algebry liniowej: macierze, wyznaczniki, układy równań liniowych, przestrzenie liniowe i ich odwzorowania. Zadań jest niewiele, podaję natomiast sporo szczegółowo przeliczonych przykładów i czytelnik może je traktować jak zadania rozwiązane.

Pragnę podziękować przede wszystkim dr Wojciechowi Jurczakowi, Marcinowi Sobocińskiemu i Dorocie Krochmalczyk, lekarzom z Kliniki Hematologii Uniwersytetu Jagiellońskiego. Bez ich aktywnego działania ta książka na pewno nie powstałaby. Miłym obowiązkiem jest wyrażenie wdzięczności za wyjaśnienia i wskazówki matematykom z Uniwersytetu Jagiellońskiego, Zofii Denkowskiej i Adamowi Janikowi oraz Zdzisławowi Pogodzie, który objaśniał mi zawiłości klasyfikacji rozmaitości i podawał materiały o historii geometrii. Andrzejowi Derdzińskiemu z Ohio State University zawdzięczam informacje o przestrzeniach, do których stosuje się twierdzenie Bochnera. Wyrazy podziękowania kieruję do obu recenzentów, których uwagi umożliwiły mi usunięcie szeregu niedostatków tekstu. Na koniec pragnę docenić starania żony, która wielokrotnie wymuszała poprawienie stylu i jasności wykładu.

Uniwersytet Jagielloński
i Centrum Kopernika
Badań Interdyscyplinarnych,
Kraków, styczeń 2010 r.