O nauczaniu matematyki

Jak badać efekty naszej pracy, czyli o ocenianiu

Michał Szurek

tom 6

Michał Szurek

O nauczaniu matematyki

Wykłady dla nauczycieli i studentów

tom 6

Projekt graficzny, okładka: *Rafał Szczawiński*, *Pracownia*

Grafika komputerowa: *Leszek Jakubowski*

Redakcja: *Agnieszka Szulc*, *Jerzy Trzeciak*

Korekta: *Jacek Foromański*

Skład (TEX): *Joanna Szyller*

ISBN 978-83-7420-396-8

Wydawca: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 80–309 Gdańsk, al. Grunwaldzka 413

Gdańsk 2006. Wydanie pierwsze

Druk i oprawa: Interak, Czarnków

Spis treści

żeby na ich podstawie dowiedzieć się czegoś o wiedzy ucznia. Truizmem jest stwierdzenie, że pytania te mają być dostosowane do poziomu wiedzy ucznia. Pewien bardzo dobry student matematyki o mało co nie „oblał" egzaminu magisterskiego, bo w komisji zasiadł gościnnie wybitny polski matematyk, członek Polskiej Akademii Nauk, który po prostu nie miał wyczucia, ile można wymagać od studenta.

Jeszcze o rozumieniu

Bardzo trudno jest odpowiedzieć na pytanie, co to znaczy, że uczeń „umie" i „rozumie". Często przyjmujemy kryterium: *umieć* to znaczy *potrafić sprawnie rozwiązywać zadania z danej partii materiału*. Kryterium to należy traktować z dużą ostrożnością. Prawie każdego, obdarzonego średnio sprawną pamięcią, można bowiem nauczyć rozwiązywania typowych zadań. Dotyczy to przede wszystkim rozwiązywania równań, badania przebiegu zmienności funkcji, prostych zależności z geometrii płaskiej i trygonometrii. Niektórzy nauczyciele szczycą się nawet tym, że potrafią rozbić cały materiał matematyki w szkole na kilkadziesiąt typowych zadań. Wystarczy zatem przeanalizować po kolei te zadania, by opanować cały materiał.[8]

Nie należy lekceważyć ani od razu potępiać takiego podejścia, choć przecież czujemy, że nie o to chodzi. A o co właściwie chodzi? Umiemy dany fragment materiału, gdy nie tylko znamy fakty, definicje, twierdzenia i technikę rachunkową. Musimy znać je tak, by „poruszać się po nich z całkowitą swobodą"[9]. W każdej chwili — a najdalej na końcu pewnego etapu rozumowania czy obliczeń — winniśmy sobie umieć uświadomić, czy idziemy dobrą drogą, czy może „coś nie gra" i gdzieś tkwi błąd.

Przykład 1. Uczniowie dostali zadanie: *rozwiąż równanie* $x^2-5x+6=0$. Sformułuj swoje kryteria oceny i oceń przedstawione rozwiązania w skali od 0 do 5 punktów.

---

[8] Z bardzo wielu pozycji poświęconych ocenianiu warto zajrzeć między innymi do następujących krótkich artykułów zamieszczonych w czasopiśmie dla nauczycieli szkół średnich „Matematyka w Szkole" wydawanym przez Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe: Marcin Braun, *Nie wiedzą, co czynią*, dodatek specjalny, maj–czerwiec 2003 (autor opisuje eksperyment przeprowadzony w kwietniu 2003 roku na 280-osobowej próbie uczniów. Celem eksperymentu było sprawdzenie, czy uczniowie rozumieją to, co obliczają); Dominika Szpic–Siwińska, *Żeby most się nie zawalił*, nr 10/2003; Maria Sierocka, *Punkty i mosty*, nr 13/2004.

[9] Nie jest to cytat z opracowania dydaktycznego, a z artykułu Mariusza Zaruskiego o taternictwie. W oryginale chodzi o to, że do miana taternika może pretendować tylko ten, kto porusza się po górach z całkowitą swobodą. Pogląd jest młodopolski, ale trafny — w szczególności właśnie w kontekście dydaktycznym.

Uczeń I wkuł na pamięć wzory na pierwiastki równania kwadratowego: *delta równa się be kwadrat minus cztery a ce, iks jeden równa się minus b minus pierwiastek z delty przez dwa a, iks dwa równa się minus b plus pierwiastek z delty przez dwa a.* Niestety, w stresie na klasówce coś mu się pomyliło i błędnie obliczył wartość wyróżnika Δ:

$$\Delta = 5^2 + 4 \cdot 6 = 49, \quad \sqrt{\Delta} = 7$$

zatem

$$x_1 = \frac{5-7}{2} = -1, \quad x_2 = \frac{5+7}{2} = 6$$

Ponieważ słyszał coś o wzorach Viète'a, obliczył iloczyn pierwiastków: -1 razy 6 równa się minus 6. „Aha, zgadza się" — pomyślał — „Iloczyn jest równy wyrazowi wolnemu, wprawdzie znak się nie zgadza, ale we wzorach Viète'a jest gdzieś minus, to pewnie tu". Napisał odpowiedź: „Pierwiastkami tego równania są -1 i 6".

Jego kolega z tej samej ławki zrobił błąd innego rodzaju. Obliczył wyróżnik poprawnie:

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 6 = 1, \quad \sqrt{\Delta} = 1$$

lecz połknął minus we wzorach na pierwiastki i napisał:

$$x_1 = \frac{-5-1}{2} = -3, \quad x_2 = \frac{-5+1}{2} = -2$$

Uczeń trzeci napisał: „Posługując się wzorami Viète'a, zgadłem dwa pierwiastki. Są nimi 2 i 3. Sprawdziłem, że są to istotnie pierwiastki danego wielomianu:

$$2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$$

$$3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$$

Ponieważ równanie kwadratowe ma co najwyżej dwa pierwiastki, to są to wszystkie pierwiastki tego równania".

Uczeń czwarty napisał: „Skoro $x^2 - 5x + 6 = 0$, to $x = \sqrt{5x-6}$" — i na tym zakończył rozwiązywanie zadania.

Czy zgadzasz się z poglądem, że za błędne, a nawet za niepełne rozwiązania zadania należy postawić zero punktów, bo są sprawy, w których nie wolno się mylić? Znakomita większość dydaktyków jest przeciwnego zdania: należy zobaczyć, co uczeń umie, i nawet jeśli zadanie jest rozwiązane źle, przyznać punkty. Wychodzą oni z założenia, że zadanie matematyczne jest zawsze pewnego rodzaju treningiem. Inny pogląd głoszą zwykle nauczyciele akademiccy, którzy chcą widzieć zadanie jako pewien problem intelektualny do rozwiązania. Argumentują oni, że nie można zbudować 90% mostu, położyć 99% toru kolejowego, a w zawodach sportowych może nie zdobyć medalu ten, kogo opuszczą siły na ostatniej prostej.

Niekiedy daję uczniom i studentom zadania z komentarzem: właśnie to zadanie ma być rozwiązane perfekcyjnie — każdy błąd będzie podstawą do uznania rozwiązania za warte zero punktów. Uważam to za dopuszczalne, pod warunkiem że nie stosuje się tego często i że uczniowie o tym wiedzą. Zrób coś najlepiej, jak umiesz.

Przykład 2. Pewnego roku zdarzyło mi się, że na egzaminie z analizy matematycznej taki dialog ze studentem powtórzył się wiele razy:
Ja: Ile jest równy kąt między styczną do wykresu funkcji sinus (w 0) a osią x?
Student: Nie wiem.
Ja: Ile jest równa pochodna funkcji sinus?
Student: Kosinus.
Ja: A zatem w zerze?
Student: Kosinus zera, kosinus zera, zaraz, już wiem. Jeden.
Ja: Dobrze. Jaki jest związek pochodnej z nachyleniem stycznej do wykresu?
Student: Pochodna to współczynnik kierunkowy.
Ja: To ile jest równy ten kąt, o który pytałem?
Student: Nie wiem.
Czy można twierdzić, że taki student zna tę partię materiału?[10]

Przykład 3. Postawiłem kiedyś bardzo wiele ocen niedostatecznych studentom trzeciego roku za jedno tylko pytanie: czy funkcja określona wzorem $f(x) = |x|^3$ jest różniczkowalna w punkcie $x = 0$? Zadawałem to pytanie ustnie, w następującej formie:

Czy funkcja moduł iks do trzeciej jest różniczkowalna w zerze?

Zdarzało się — stosunkowo często — że zdający pytał: „Czy do potęgi trzeciej jest moduł, czy x?” Wtedy od razu miał ujemne punkty[11]. Większość studentów odpowiadała: „Nie, bo moduł nie jest różniczkowalny”, a przyciśnięci do muru potrafili niekiedy zacytować — poprawnie — twierdzenie, że iloczyn funkcji różniczkowalnych jest różniczkowalny… a że moduł nie jest różniczkowalny (i tu znany rysunek), więc moduł podniesiony do trzeciej potęgi nie

[10] Nauczyciel, który bardzo wnikliwie przeczytał wstępną wersję tego wykładu, dopisał tu: „Proponuję szerzej skomentować ten przykład (jaka jest badana umiejętność, jak należy ocenić jej opanowanie)”. Mój punkt widzenia jest jednak następujący: minimalny poziom znajomości pojęcia „pochodna” obejmuje błyskawiczną odpowiedź na pytanie o wartość kąta, pod jakim nachylony jest wykres funkcji sinus w punkcie 0.

[11] I znów komentarz tego samego nauczyciela: „Dlaczego? Moim zdaniem student nie musiał być niedouczony. Wzory obydwu funkcji są jednak inne. Chwila refleksji nad tym, dlaczego to ta sama funkcja, na pewno by nie zaszkodziła”. A mój (M. Sz.) komentarz jest podobny do poprzedniego: są takie partie materiału, które musimy czuć i nie zastanawiać się nad nimi. Zaliczyłbym do tego wyczucie, że podane funkcje są równe.

Na zakończenie taki trochę… śmiech przez łzy[60]:

Przepisy dla nauczycieli jednego z college'ów amerykańskich (1872)

1. Nauczyciele każdego dnia napełniają lampy i czyszczą kominki.
2. Każdy nauczyciel winien przynieść wiadro wody i kosz węgla na zajęcia na cały dzień.
3. Pióra należy przygotowywać starannie. Dozwolone jest ostrzenie stalówek według indywidualnych gustów uczniów.
4. Mężczyźni mogą każdego tygodnia otrzymać jeden wieczór wolny, albo dwa — jeżeli uczęszczają regularnie do kościoła.
5. Po dziesięciu godzinach w szkole nauczyciele mogą spędzać pozostały czas na czytaniu Biblii lub innych stosownych książek.
6. Nauczycielki, które zachowują się nieodpowiednio lub zawierają niestosowne znajomości, będą zwolnione z pracy.
7. Każdy nauczyciel winien odkładać ze swoich zarobków odpowiednią sumę na swoje lata emerytalne, aby nie stać się ciężarem dla społeczeństwa.
8. Każdy nauczyciel, który pali papierosy, używa alkoholu pod dowolną postacią, uczęszcza na bilard, goli się u fryzjera, daje tym samym podstawę do wątpienia w swoją wartość, dobre intencje, rzetelność i uczciwość.
9. Nauczyciel wypełniający swoje powinności bez zarzutu przez 5 lat otrzyma podwyżkę w wysokości 25 centów na tydzień, pod warunkiem, że zaakceptuje to Rada Oświatowa.

Zadania powtórzeniowe

12.1. Omów różnicę między egzaminem sprawdzającym a egzaminem różnicującym.

12.2. Wyjaśnij na przykładach różne możliwości pojmowania słowa „rozumieć".

12.3. Co to jest „egzamin typu twórczego"? Podaj przykłady.

12.4. Podaj przykłady poprawnie zredagowanych zadań egzaminacyjnych, w których największa trudność polega na zrozumieniu treści.

12.5. Podaj przykłady zadań z haczykiem, to znaczy takich, w których narzucająca się odpowiedź jest błędna.

12.6. Omów zalety i wady egzaminów, na których jest dużo prostych zadań i mało czasu, oraz egzaminów, na których jest dużo czasu, zadań jest niewiele, ale są trudne. Do której kategorii należy egzamin maturalny, egzaminy na studiach, które zdawałeś, zawody Olimpiady Matematycznej?

[60] Ten tekst (napisany po angielsku) widziałem w latach siedemdziesiątych XX wieku na biurku dziekana Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW.

12.7. Czy na egzaminie ustnym powinno się wymagać, by zdający odpowiadał od razu po otrzymaniu pytania, czy należy mu dać trochę czasu na przygotowanie się? Jeśli uważasz, że „to zależy”, to sprecyzuj, od czego.

12.8. Chcesz urządzić uczniom sprawdzian typu „wykład jako egzamin”. Zaprojektuj go. Sam sprecyzuj, w jakiej szkole uczysz i co ma być celem sprawdzianu.

12.9. Omów zalety i wady zadań zamkniętych, otwartych i zadań z luką.

12.10. Co to jest współczynnik trudności zadania i moc różnicująca?

12.11. Jakie umiejętności i wiadomości z matematyki można łatwo sprawdzić za pomocą testu wielokrotnego wyboru, a jakich nie sposób? Czy rozumienie można tak sprawdzić?

12.12. Omów opisowy sposób oceniania. Jakie są różnice między oceną opisową i oceną czynnościową?

12.13 (zajmie ci co najmniej kilka godzin). Z podanych w tekście książki pytań z zestawów egzaminacyjnych z 1954 roku wybierz te, na które „na pewno” nie odpowiedzą twoi uczniowie. Dlaczego nie odpowiedzą?

12.14. Z podanych w tekście książki zadań z testu z 1958 roku wybierz te zadania, których „na pewno” nie rozwiążą twoi uczniowie. Dlaczego nie rozwiążą?

12.15. Omów zalety i wady egzaminów testowych oraz scharakteryzuj wiedzę i umiejętności, które można sprawdzić w ten sposób.

12.16. Przeanalizuj poniższe zadanie maturalne (Kraków-miasto, 1964)[61]:

> Trzy szkoły postanowiły wspólnie uczcić czynem XX-lecie PRL, dokonując zalesienia pewnego obszaru w ciągu 2 dni. W ciągu ilu dni wykonałaby tę pracę każda ze szkół, pracując z osobna, jeżeli druga szkoła wykonałaby tę pracę w czasie dłuższym o 5 dni niż pierwsza, a trzecia w czasie o 2 dni dłuższym niż podwojony czas pracy pierwszej i drugiej łącznie?

---

[61] Nauczyciel, który przeczytał uważnie ten tekst, napisał prosto z mostu: „Niezależnie od XX-lecia PRL czy 0-lecia IV RP nie ukrywam, że takie zadanie uważam za bzdurne i szkodliwe. Zadanie takie nie ma żadnego związku z życiem (praca wykonana nie jest proporcjonalna do czasu) i stwarza tylko wrażenie, że matematyka lubi upajać się nonsensami”. A ja (M. Sz.) zwrócę uwagę, że wychowanie od indoktrynacji oddziela cienka linia. Oczywiście są prace, których wynik jest wprost proporcjonalny do włożonego w tę pracę czasu. Są to najprostsze prace: malowanie ściany, kopanie rowu, przenoszenie komputerów z magazynu do salonu sprzedaży. Określmy tę działalność dosadnie: filozofia młotka i przecinaka. Według tej teorii wszystko da się zrobić za pomocą tych dwóch narzędzi. Propaganda PRL gloryfikowała taką właśnie działalność (dowcip rysunkowy Szymona Kobylińskiego w „Polityce”: „Przywieźlim te mózgi elektronowe… gdzie zrucać?”).

Najpierw rozwiąż to zadanie, a następnie wykonaj poniższe polecenia.

a) Oceń poprawność sformułowania treści. Czy nie uważasz, że ostatnie słowa zadania: „podwojony czas pracy pierwszej i drugiej łącznie” jednoznacznie określają, o co chodzi?
b) Zaproponuj punktację.
c) Zaproponuj opisowy system oceniania.
d) Nawet jeżeli nie pamiętasz czasów PRL, wypowiedz się, czy wplątywanie treści patriotyczno-politycznej do zadań matematycznych jest dopuszczalne.
e) Zmień treść zadania na niby-współczesną, np. o budowie supermarketu. Czy zaakceptujesz takie sformułowanie?
f) Oceń, czy dla twoich uczniów jest to zadanie łatwe, trudne, czy bardzo trudne.
g) Czy uważasz, że to zadanie mogłoby stać się zadaniem maturalnym w bieżącym roku? Uzasadnij, dlaczego.
h) Oceń następujące rozwiązanie ucznia:
Zakładam najpierw, że liczby dni, w ciągu których poszczególne szkoły wykonałyby pracę, są liczbami naturalnymi. Niech n będzie liczbą dni, w ciągu których pracę wykonałaby pierwsza szkoła. Po prostych i oczywistych obliczeniach dochodzę do wniosku, że liczba ta ma spełniać równanie $\frac{1}{2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+5} + \frac{1}{4n+12}$. Oczywiście $n > 2$, bo jeśli wszystkie szkoły razem pracują 2 dni, to dla każdej z nich ten czas będzie dłuższy. Jeżeli $n = 4$, to $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+5} + \frac{1}{4n+12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{28} = \frac{25}{63} < \frac{1}{2}$. Ogólniej, gdy $n > 4$, to każdy ze składników sumy $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+5} + \frac{1}{4n+12}$ jest mniejszy od analogicznej wartości przy $n = 4$, zatem nie otrzymamy nigdy $\frac{1}{2}$. A zatem jedyną liczbą naturalną spełniającą to równanie może być $n = 3$.
Sprawdźmy: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3+5} + \frac{1}{4\cdot 3+12} = \frac{8+3+1}{24} = \frac{1}{2}$. Wykazaliśmy, że jedynym rozwiązaniem równania dla naturalnego n jest $n = 3$. Uwolnijmy się teraz od założenia $n \in \mathbb{N}$. W przedziale $(0; +\infty)$ funkcja $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} + \frac{1}{4x+12}$ jest określona i malejąca, jako suma trzech funkcji malejących. Może mieć tam zatem co najwyżej jedno miejsce zerowe. Wykazałem, że jest nim $x = 3$. Pierwsza szkoła pracowałaby przez 3 dni, druga przez 8, trzecia przez 24.
i) Oceń rozwiązanie, w którym uczeń po poprawnym wyznaczeniu wielomianu stopnia trzeciego znalazł pierwiastki $x_1 = -4$, $x_2 = -\frac{5}{2}$, $x_3 = 3$, a potem napisał tak: „Pierwiastki ujemne odpowiadają sytuacji, gdy niektóre szkoły mają ujemną wydajność pracy, to znaczy niszczą to, co zrobiły pozostałe. Na przykład dla $x = -4$ mamy sytuację, że zarówno pierwsza, jak i trzecia szkoła zniszczyłaby las w ciągu 4 dni, druga zalesiłaby obszar w ciągu jednego dnia. Proste zastanowienie się wystarcza do zrozumienia, że przy wspólnej pracy obszar zostanie zalesiony w dwa dni”. Czy należy za to uczniowi dodać punkty, odjąć, czy nic nie zmieniać?

j) Wyobraź sobie, że masz ułożyć zadania o bardzo podobnej treści i trudności co rozpatrywane tutaj, ale o nieco innych danych: na przykład dla trzech grup uczniów (żeby zmniejszyć możliwości ściągania). Jak to zrobisz?

12.17. Tadeusz Kotarbiński (1886–1981) był wybitnym filozofem, wieloletnim prezesem Polskiej Akademii Nauk. Przeczytaj zamieszczony poniżej urywek jego wspomnień[62]. Przemyśl, czy chcesz naśladować profesora Bielajewa, którego Kotarbiński tak wysoko ocenia? Czy zgadzasz się z „kultem absolutnej poprawności jako cnoty szkolnej"? Przemyśl zdanie o konieczności zachowania równowagi między wpajaniem automatyzmów i rozbudzaniem umysłów. Wyobraź sobie, jak wyglądały lekcje francuskiego w szkole, do której chodził Tadeusz Kotarbiński, skoro „typowy Niemiec uczył niemieckiego, a typowy Francuz francuskiego", a lekcje niemieckiego wyglądały jak niżej.

> Opuszczam teraz dom rodzinny i przenoszę się pamięcią do szkoły średniej ogólnokształcącej, gdzie spędziłem 8 i pół lat. Było to V Filologiczne Gimnazjum Rządowe w Warszawie (carskie, z rosyjskim językiem nauczania), szkoła obca, bez przyjaźni między nauczycielstwem a uczniami, szkoła mundurowa o typie stosunków półmilitarnym, całkowicie niemal nieprzyrodnicza, zasadniczo — choć niefanatycznie — fideistyczna, społecznie reakcyjna, ale przy wszystkich swych wadach — szkoła pouczająca i wymagająca, dobrze gimnastykująca umysły przy pomocy gramatyk, przekładów, wypracowań w 6 językach, algebry i geometrii… Jak tego uczyli co najlepsi z naszych nauczycieli? Co z ich pouczeń warto zarejestrować w katalogu zaleceń dobrej roboty nauczycielskiej?
>
> Staje mi przed oczami postać profesora Bielajewa, specjalisty od algebry szkolnej. Cóż to był za pedant! Każdy wywód algebraiczny, każde przekształcenie wzoru, każda operacja przekształcenia wzoru, każda operacja rozwiązywania układu równań musiały być dokonane wedle ustalonej kolejności kroków, bez żadnych opuszczeń ani przeskoków i wszystko musiało być zapisane w sposób całkowicie jednoznaczny. Ponieważ cyfra 6 przypomina kształtem literę b małe, przeto w formułach algebry nie wolno było pisać b w zwykłej postaci, lecz w postaci umyślnie i specjalnie zmodyfikowanej; a znaku mylnie wypisanego nie wolno było, broń Boże, przerabiać na znak właściwy. Należało natomiast ów znak mylny przekreślić i nad nim wypisać znak potrzebny. W tym punkcie przelicytował Bielajewa tylko pewien niemiecki profesor fizyki doświadczalnej, który błędy w napisach na tablicy poprawiał kredą czerwoną.
>
> Co widzę cennego w pedantyzmach szkolnego algebraisty? Widzę coś bezcennego, kult absolutnej poprawności jako cnoty szkolnej. Opanowawszy technikę danej umiejętności, można sobie potem dowoli dawać takie czy inne luzy w procedurze, ale trzeba przedtem przejść przez szkołę poprawności zupełnej i wdzięczność się należy ze strony uczniów intruktorowi, trenerowi,

[62] Tadeusz Kotarbiński, *Sprawność i błąd: z myślą o dobrej robocie nauczyciela*, PZWS, Warszawa 1956.

Przekazujmy naszym uczniom dyskretne sygnały, że matematyka jest najlepsza, najciekawsza, najważniejsza, najbardziej wciągająca. A dopiero na końcu dodawajmy, że także najbardziej wymagająca.

Wykłady Michała Szurka są przeznaczone zarówno dla doświadczonych nauczycieli, jak i dla studentów, którzy dopiero przygotowują się do pracy w szkole. Pierwszym zaproponują nowe podejście do przedstawiania niektórych tematów i zagadnień. Drugim pomogą przezwyciężyć strach przed lekcjami, poznać zasady ich prowadzenia i uporządkować swą wiedzę. Wszystkim dadzą możliwość odkrycia własnego twórczego sposobu na nauczanie, a dzięki temu przekonania uczniów, że matematyka jest i pożyteczna, i interesująca.

W skład serii wchodzi osiem tomów, a każdy z nich gwarantuje lekturę zajmującą, pełną ciekawostek i interesujących komentarzy.

GDAŃSKIE WYDAWNICTWO OŚWIATOWE

www.gwo.pl